University of Namur



**MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES**

# Résolution d'inégalités variationnelles par les méthodes du point proximal et du point fixe

Giot, Noémie

*Award date:*
2006

FUNDP
NAMUR

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Rempart de la Vierge, 8
B - 5000 Namur (Belgique)

# Résolution d'inégalités variationnelles par les méthodes du point proximal et du point fixe

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
par

GIOT Noémie

**Promoteur :** STRODIOT Jean-Jacques

Année Académique 2005-2006

*La rédaction de ce mémoire n'aurait pas été possible sans le concours de certaines personnes que je tiens à remercier très sincèrement ici :*

*M. Jean-Jacques Strodiot d'avoir accepté de diriger ce mémoire. Sa disponibilité, sa patience et ses conseils avisés m'ont permis d'effectuer ce travail dans les meilleures conditions.*

*J'aimerais aussi exprimer ma reconnaissance à ma sœur Aurélie qui a corrigé mes fautes de français.*

*Enfin, je tiens à remercier ma famille et mes proches pour leurs encouragements et soutiens tout au long de mes études.*

# Résolution d'inégalités variationnelles par les méthodes du point proximal et du point fixe


## Résumé

Dans ce mémoire, nous proposons des méthodes pour résoudre les inégalités variationnelles (univoques et multivoques) et le problème d'équilibre, en associant la méthode du point proximal au principe de contraction de Banach. En réalité, nous résolvons les inégalités variationnelles et le problème d'équilibre fortement monotones par le principe du point fixe, et ensuite, nous combinons cette méthode avec la méthode du point proximal pour résoudre les inégalités variationnelles et le problème d'équilibre monotones.


# Coupling the Banach contraction mapping fixed point principle and the proximal point method to solve variational inequalities


## Abstract

In this thesis, we propose methods for solving variational inequalities (singlevalued and multivalued) and equilibrium problem, by using the proximal point method and the Banach contraction mapping fixed point principle. In fact we solve strongly monotone variational inequalities and equilibrium problem by the Banach contraction mapping fixed point principle, and then we combine this method with the proximal point method for solving monotone variational inequalities and equilibrium problem.

# Introduction

Le but de ce mémoire est de résoudre le problème d'équilibre mathématique et les inégalités variationnelles (univoques et multivoques), en utilisant la méthode du point proximal, et en résolvant les sous-problèmes de notre problème de départ par le principe du point fixe. Ce faisant, nous obtenons des algorithmes spécifiques ayant une vitesse de convergence linéaire.

La combinaison de ces deux méthodes est particulièrement intéressante dans notre contexte. En effet, le principe de contraction de Banach ne peut être appliqué que sous des hypothèses de forte monotonicité, et les sous-problèmes associés à la méthode du point proximal vérifient ces hypothèses. L'algorithme obtenu sera convergent sous des hypothèses faibles de monotonicité.

La méthode du point proximal a été introduite pour résoudre l'inclusion $0 \in T(u)$ où $T$ est un opérateur maximal monotone. Dans ce mémoire, nous adaptons cette méthode pour pouvoir résoudre le problème d'équilibre ainsi que les problèmes d'inégalités variationnelles.

Dans le premier chapitre, basé sur l'article de E.Blum et W.Oettli [1], nous considérons le problème d'équilibre mathématique, défini sur l'espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$, par

$$\begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \\ \text{tel que } f(x^*, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{H}$ et $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathrm{I\!R}$ avec $f(x,x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{C}$.
Nous montrons que ce problème d'équilibre comprend comme cas particuliers les problèmes d'optimisation, de point-selle, de point fixe, l'équilibre de Nash, les inégalités variationnelles et les problèmes complémentaires.

Notre objectif étant d'établir des algorithmes de résolution de ce problème, nous commençons par examiner les cas particuliers des problèmes d'inégalités variationnelles, avant d'aborder le problème général d'équilibre dans le dernier chapitre.

Au deuxième chapitre, sur base de l'article de P.N.Anh et L.D.Muu [6], nous considérons les inégalités variationnelles univoques monotones, définies par :

$$\begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \\ \text{tel que } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{H}$ et $f : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ monotone.
Nous les résolvons par la méthode du point proximal, et ensuite, nous appliquons la méthode du point fixe à chacun des sous-problèmes, qui sont fortement monotones. Enfin, nous en déduisons des algorithmes convergeant linéairement.

Dans le troisième chapitre, basé sur l'article de P.N.Anh, L.D.Muu, V.H.Nguyen et J.J.Strodiot [5], nous compliquons l'inégalité variationnelle univoque monotone, en ajoutant une fonction $\varphi$ fermée, propre et convexe. C'est-à-dire, nous étudions les inégalités variationnelles univoques mixtes monotones définies par :

$$\begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \\ \text{tel que } \langle F(x^*), x - x^* \rangle + \varphi(x) - \varphi(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Nous résolvons ces problèmes par la méthode du point fixe en utilisant une extension de la projection. En particulier, nous montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit solution de cette inégalité variationnelle est qu'il soit point fixe d'une certaine fonction $h$, définie comme la solution d'un problème évaluant la fonction donnée.

Dans le quatrième chapitre, sur base de l'article de P.N.Anh, L.D.Muu, V.H.Nguyen et J.J.Strodiot [3], nous nous intéressons aux inégalités variationnelles multivoques, définies par :

$$\begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C}, \; w^* \in F(x^*) \\ \text{tel que } \langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est une fonction multivoque.
Nous commençons par résoudre ce problème quand $F$ est fortement monotone grâce à l'algorithme du point fixe. Ensuite, nous couplons l'algorithme obtenu avec la méthode du point proximal, pour résoudre l'inégalité variationnelle multivoque monotone (plus forcément fortement mono-

tone). Nous en déduisons un algorithme convergeant linéairement, où l'évaluation de l'opérateur proximal peut être implémentée en calculant une projection sur $\mathcal{C}$.

Au cinquième chapitre, sur base de l'article de P.N.Anh et L.D.Muu [4], nous étudions les inégalités variationnelles multivoques mixtes, définies par :

$$\begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C},\ w^* \in F(x^*) \\ \text{tel que } \langle w^*, x - x^* \rangle + \varphi(x) - \varphi(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et sous-différentiable.
Nous résolvons ces problèmes, comprenant des fonctions fortement monotones et co-coercives, grâce à la méthode du point proximal. Nous montrons que les solutions de ces inégalités variationnelles peuvent être calculées en trouvant un point fixe d'une fonction multivoque non expansive. D'où, nous résolvons les inégalités variationnelles multivoques mixtes fortement monotones et co-coercives par le principe de contraction de Banach.

Dans le dernier chapitre, sur base de l'article de L.D.Muu, V.H.Nguyen et J.J.Strodiot [2], nous revenons au cas général des problèmes d'équilibres, et nous les résolvons par le principe de contraction de Banach quand ces problèmes sont fortement monotones. Et ensuite, nous appliquons la méthode du point proximal pour résoudre les problèmes d'équilibres monotones (plus forcément fortement monotones).

# Table des matières

# Chapitre 1

# Le problème d'équilibre

## 1.1 Introduction

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide, fermé et convexe dans un espace réel de Hilbert $\mathcal{H}$.
Soit $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$.

Considérons le **problème d'équilibre** suivant :

$$(PE) \begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \text{ tel que} \\ f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Le problème (PE) est très général dans le sens où il inclut, comme cas particulier, les problèmes d'optimisation, de points-selles, les équilibres de Nash, les problèmes de points fixes, les inégalités variationnelles et les problèmes complémentaires. L'intérêt de ce problème (PE) est qu'il unifie tous ces problèmes particuliers. De plus, beaucoup de méthodes résolvant ces problèmes peuvent être étendues, modulo de petites variations, pour résoudre le problème d'équilibre (PE).

## 1.2 Du problème d'équilibre aux inégalités variationnelles

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide, fermé et convexe dans un espace réel de Hilbert $\mathcal{H}$.
Soit $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathrm{I\!R}$ tel que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$.

Considérons le **problème d'équilibre** suivant :

$$(\text{PE}) \begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \text{ tel que} \\ f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

**Définition 1.** La bifonction $f$ est monotone dans $\mathcal{C}$ si

$$f(x,y) + f(y,x) \leq 0 \qquad \forall x, y \in \mathcal{C}.$$

**Définition 2.** Une fonction $T : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ est Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$ de constante $L \geq 0$ ($L$-Lipschitzienne) si

$$\|Tx - Tx'\| \leq L \|x - x'\| \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}. \tag{1.1}$$

Si (1.1) est vérifié avec $L < 1$, alors $T$ est contractive dans $\mathcal{C}$.
Si $L = 1$, alors $T$ est nonexpansive dans $\mathcal{C}$.

### 1.2.1 Optimisation

Soit $\varphi : \mathcal{C} \to \mathrm{I\!R}$. Le problème consiste à trouver $x^* \in \mathcal{C}$ tel que

$$\varphi(x^*) \leq \varphi(y) \ \forall y \in \mathcal{C}. \tag{1.2}$$

Nous écrirons $\min_{x \in \mathcal{C}} \varphi(x)$ pour ce problème.

Le problème (1.2) coïncide avec (PE) si on prend pour fonction $f$ la fonction suivante :

$$f(x,y) := \varphi(y) - \varphi(x).$$

Dans ce cas, la fonction $f$ est monotone, car $f(x,y) + f(y,x) = 0$.

### 1.2.2 Point-selle

Soit $\varphi : C_1 \times C_2 \to \mathrm{I\!R}$. On dira que $(x_1^*, x_2^*)$ est un point-selle de $\varphi$ si

$$(x_1^*, x_2^*) \in C_1 \times C_2, \ \varphi(x_1^*, y_2) \leq \varphi(y_1, x_2^*) \ \ \forall (y_1, y_2) \in C_1 \times C_2. \tag{1.3}$$

Soit $\mathcal{C} := C_1 \times C_2$ et soit $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathrm{I\!R}$ tel que

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \varphi(y_1,x_2) - \varphi(x_1,y_2).$$

Alors $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ est une solution de (PE) si et seulement si $(x_1^*, x_2^*)$ satisfait (1.3).
La fonction $f$ est monotone dans ce cas.

### 1.2.3 Equilibre de Nash

Soit $I$ un ensemble d'indices finis. Pour tout $i \in I$, soit un ensemble donné $C_i$. Soit $\mathcal{C} := \prod_{i\in I} C_i$. Pour tout $i \in I$, soit une fonction donnée $f_i : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$. Pour $x := (x_i)_{i\in I} \in \mathcal{C}$, nous définissons $x^i := (x_j)_{j\in I, j\neq i}$.
Le point $x^* = (x_i^*)_{i\in I} \in \mathcal{C}$ est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout $i \in I$, nous avons

$$f_i(x^*) \leq f_i(x^{*i}, y_i) \qquad \forall y_i \in C_i. \tag{1.4}$$

Soit $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(x,y) := \textstyle\sum_{i\in I}(f_i(x^i, y_i) - f_i(x)).$$

Alors $x^* \in \mathcal{C}$ est un équilibre de Nash si et seulement si $x^*$ vérifie (PE). En effet, si (1.4) a lieu pour tout $i \in I$, alors (PE) est vérifié. Si pour tout $i \in I$, nous choisissons $y \in \mathcal{C}$ tel que $x^{*i} = y^i$, alors $f(x^*, y) = f_i(x^{*i}, y_i) - f_i(x^*)$. D'où, (PE) implique (1.4) pour tout $i \in I$.
Dans ce cas, $f$ n'est pas forcément monotone.

### 1.2.4 Point fixe

Soit $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ une fonction. Nous voulons trouver $x^* \in \mathcal{C}$ tel que

$$x^* = Tx^*. \tag{1.5}$$

Soit $f(x,y) := \langle x - Tx, y - x\rangle$.

Alors $x^*$ résoud (PE) si et seulement si $x^*$ est solution de (1.5).
En effet, (1.5) $\Rightarrow$ (PE) est évident.
Et, si (PE) est vérifié, alors choisir $y^* := Tx^*$ pour obtenir

$$0 \leq f(x^*, y^*) = -\|x^* - Tx^*\|^2,$$

d'où, $x^* = Tx^*$. Donc, (PE) $\Rightarrow$ (1.5).
Dans ce cas, la fonction $f$ est monotone si et seulement si

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \leq \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{C}$$

d'où, en particulier, si $T$ est nonexpansive.

### 1.2.5 Inégalité variationnelle

Soit $T : \mathcal{C} \to \mathcal{H}^*$(le dual de $\mathcal{H}$) une fonction. Nous voulons trouver $x^* \in \mathcal{H}$ tel que

$$x^* \in \mathcal{C}, \ \langle Tx^*, y - x^* \rangle \geq 0 \ \ \forall y \in \mathcal{C}. \tag{1.6}$$

Soit $f(x, y) := \langle Tx, y - x \rangle$.

Alors (1.6) $\Leftrightarrow$ (PE).

### 1.2.6 Problème complémentaire

Soit $\mathcal{C}$ un cône fermé et convexe avec

$$\mathcal{C}^* := \{x^* \in \mathcal{H}^* | \langle x^*, y \rangle \geq 0 \ \ \forall y \in \mathcal{C}\}$$

le cône polaire.

Soit $T : \mathcal{C} \to \mathcal{H}^*$ une fonction. Nous voulons trouver $x^* \in \mathcal{H}$ tel que

$$x^* \in \mathcal{C}, \ Tx^* \in \mathcal{C}^*, \ \langle Tx^*, x^* \rangle = 0. \tag{1.7}$$

Il est facile de voir que (1.7) est équivalent à (1.6).

En effet, (1.7) $\Rightarrow$ (1.6) est évident.

Si (1.6) est vérifié, alors, en prenant $y := 2x^*$ et $y := 0$, nous obtenons de (1.6) que $\langle Tx^*, x^* \rangle = 0$ car $\langle Tx^*, y \rangle \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}$. D'où (1.6) $\Rightarrow$ (1.7).

### 1.2.7 Inégalité variationnelle multivoque

Soit $T : \mathcal{C} \to \mathcal{H}^*$ une fonction multivoque, avec $Tx$ compact, convexe, non vide pour tout $x \in \mathcal{C}$. Nous voulons trouver $x^* \in \mathcal{H}, \ \xi^* \in \mathcal{H}^*$ tel que

$$x^* \in \mathcal{C}, \ \xi^* \in Tx^*, \ \langle \xi^*, y - x^* \rangle \geq 0 \ \ \forall y \in \mathcal{C}. \tag{1.8}$$

Soit $f(x, y) := \max_{\xi \in Tx} \langle \xi, y - x \rangle$.

Alors $x^*$ résoud (PE) si et seulement si $(x^*, \xi^*)$ est une solution de (1.8).

En effet, si $x^*, \xi^*$ résolvent (1.8), alors

$$f(x^*, y) \geq \langle \xi^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C},$$

et $x^*$ vérifie (PE).

Inversément, (PE) implique (1.8) avec $\xi^* \in Tx^*$ est non trivial, et suit du lemme ci-dessous avec

$$D := Tx^* \text{ et } p(\xi, y) := \langle \xi, y - x^* \rangle .$$

**Lemme 1.** *Soit $D$ un ensemble convexe, compact. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble convexe. Soit $p : D \times \mathcal{C} \to I\!R$ une fonction concave et semi-continue supérieurement pour le premier argument et convexe pour le second. Supposons que*

$$\max_{\xi \in D} p(\xi, y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}.$$

*Alors il existe $\xi^* \in D$ tel que $p(\xi^*, y) \geq 0 \ \ \forall y \in \mathcal{C}$.*

*Démonstration.* Supposons, par l'absurde, que ce ne soit pas vrai. Alors, pour tout $\xi \in D$, il existe $y \in \mathcal{C}$ et $\epsilon > 0$ tel que $p(\xi, y) < -\epsilon$. D'où, les ensembles ouverts

$$S(y, \epsilon) := \{\xi \in D | p(\xi, y) < -\epsilon\} \ \ (y \in \mathcal{C}, \epsilon > 0)$$

couvrent l'ensemble compact $D$. Il existe donc un sous-ensemble fini

$$S(y_i, \epsilon_i) \ (i = 1, \ldots, m).$$

Nous avons donc $D \subseteq \cup_i S(y_i, \epsilon_i)$.

Soit $\epsilon := \min_i \epsilon_i$. Alors, par $D \subset \cup_i S(y_i, \epsilon)$, nous avons

$$\min_i p(\xi, y_i) \leq -\epsilon \quad \forall \xi \in D.$$

En effet, $\xi \in D, \ \exists i \ \ \xi \in S(y_i, \epsilon) \ \ p(\xi, y_i) < -\epsilon$.

Donc $\min_i p(\xi, y_i) \leq p(\xi, y_i) < -\epsilon$.

Puisque la fonction $p(., y_i)$ est concave, par le Théorème 21.1 de [10], il existe des nombres réels $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ avec $\sum_i \mu_i = 1$ tel que $\sum_i \mu_i p(\xi, yi) \leq -\epsilon \ \forall \xi \in D$. Puisque $p(\xi, .)$ est convexe, avec $y^* := \sum_i \mu_i y_i \in \mathcal{C}$, $p(\xi, y^*) \leq \sum_i \mu_i p(\xi, y_i) < -\epsilon \quad \forall \xi \in D$.

D'où, $\max_{\xi \in D} p(\xi, y^*) < 0$ est en contradiction avec les hypothèses.

□

**Rappel :** Théorème 21.1 de [10] :

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble convexe.

Soit $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions concaves. Alors

ou bien $\exists \ x \in \mathcal{C}$ tel que $f_i(x) > 0 \ i = 1, \ldots, m$

ou bien $\exists \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ non tous nuls tel que $\sum_i \lambda_i f_i(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathcal{C}$.

# Chapitre 2

# Les inégalités variationnelles univoques monotones

## 2.1 Introduction

Soit $\mathcal{H}$ un espace réel de Hilbert où $\langle .,. \rangle$ décrit le produit scalaire et où $\|.\|$ décrit la norme.
Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ un ensemble non vide, convexe et fermé.
Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ une fonction monotone.

Considérons l'**inégalité variationnelle univoque monotone** suivante :

$$(IV) \begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \text{ tel que} \\ \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

La fonction $F$ est appelée l'opérateur de coût de (IV).

Nous savons que si $F$ est le gradient d'une fonction convexe $f$, alors $x^*$ est solution de (IV) si et seulement s'il est solution optimale du problème de minimisation convexe

$$min\{f(x)|x \in \mathcal{C}\}$$

L'algorithme du point proximal est une procédure itérative fondamentale pour résoudre l'inclusion $0 \in T(x)$ où $T$ est un opérateur maximal monotone. Ce problème d'inclusion comprend l'inégalité variationnelle comme un cas particulier. Dans le cas de l'inégalité variationnelle (IV), l'algorithme du point proximal engendre une suite $\{x^k\}$ telle que $x^{k+1} := P_k(x^k)$ où $P_k$ est appelé l'opérateur proximal ou résolvent, défini par $P_k := (I + c_k T)^{-1}$, où $c_k > 0$, $I$ est l'identité et $T(x) = F(x) + N_C(x)$.

Pour la convergence, à part la monotonicité et la continuité, l'algorithme du point proximal ne requiert pas d'hypothèses supplémentaires sur $F$. Cependant, du point de vue de l'implémentation, calculer des points d'itération est généralement difficile, puisqu'il requiert l'évaluation de l'opérateur proximal $(I + c_k T)^{-1}$ à chaque point $x^k$. Et nous savons que calculer chaque point d'itération $x^k$ requiert de résoudre une inégalité variationnelle fortement monotone.

Dans cette section, nous couplerons le principe de contraction de Banach avec l'algorithme du point proximal pour obtenir un algorithme du type projection. En utilisant la technique de régularisation, cet algorithme ne requiert pas la connaissance de la constante de Lipschitz de l'opérateur de coût. De plus, en utilisant le principe de contraction de Banach et la méthode du point fixe, la convergence est facile à obtenir. Comme la méthode de projection, le sous-problème principal est de trouver la projection d'un point dans l'ensemble admissible $C$.

Cette partie s'organise de cette façon. La section suivante comprend des préliminaires à l'algorithme du point proximal appliqué aux inégalités variationnelles monotones. La troisième section décrit en détail deux algorithmes.

## 2.2 Préliminaires

Soit $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{H}$ et soit $u \in \mathcal{H}$.

La distance de $u$ à $A$ est définie par $d_A(u) = \inf_{x\in A} \|x - u\|$.

Nous savons que si $A$ est fermé et convexe, alors il existe l'unique $v \in A$ tel que $d_A(u) = \|v - u\|$.

On dit que $v$ est la projection de $u$ dans $A$.

Soit $T : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ une fonction multivoque.

Nous définissons le domaine et le graphe de $T$ comme d'habitude :

$$domT := \{x|T(x) \neq \emptyset\}$$
$$graphT := \{(x,y)|y \in T(x)\}.$$

**Définition 3.** La fonction $T$ est monotone dans $\mathcal{C}$ si

$$\langle z - z', x - x'\rangle \geq 0 \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}, z \in T(x), z' \in T(x').$$

**Définition 4.** $T$ est maximal monotone si $T$ est monotone dans $\mathcal{H}$ et si son graphe n'est pas proprement contenu dans le graphe de n'importe quelle autre fonction monotone.

**Définition 5.** $T$ est fortement monotone dans $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ de module $\beta > 0$ ($\beta$ -fortement monotone) si

$$\langle z - z', x - x'\rangle \geq \beta \|x - x'\|^2 \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}, z \in T(x), z' \in T(x').$$

**Définition 6.** Une fonction $M : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ est Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$ de constante $L \geq 0$ ($L$-Lipschitzienne) si

$$\|M(x) - M(x')\| \leq L \|x - x'\| \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}. \tag{2.1}$$

Si (2.1) est vérifié avec $L < 1$, alors $M$ est contractive dans $\mathcal{C}$.

Si $L = 1$, alors $M$ est nonexpansive dans $\mathcal{C}$.

L'algorithme du point proximal peut être utilisé pour résoudre l'inclusion $0 \in T(u)$, où $T$ peut être une fonction multivoque maximale monotone. L'algorithme est basé sur le fait que si $T$ est maximale monotone, alors, pour tout $c > 0$, l'opérateur proximal $P_c := (I + cT)^{-1}$ est défini partout, univoque et nonexpansif dans tout l'espace. Il est facile à voir que :

$$0 \in T(x) \Leftrightarrow P_c(x) = x$$

En effet, il est facile à voir que $graphP_c = \{(x+cu, x)|(x,u) \in graphT\}$
D'où, $\quad 0 \in T(x) \Leftrightarrow (x,0) \in graphT \Leftrightarrow (x,x) \in graphP_c \Leftrightarrow P_c(x) = x.$

Donc, l'inclusion est équivalente à trouver un point fixe de la fonction nonexpansive $P_c$. Pour ce faire, partant d'un point arbitraire $x^0$, l'algorithme se construit itérativement comme une suite $\{x^k\}$ telle que

$$x^{k+1} = P_k(x^k) \qquad k = 0, 1, \ldots$$

où $P_k = (I + c_k T)^{-1}$ et $\{c_k\}$ est une suite de nombres positifs choisis à l'avance.

Le but de cet algorithme est d'évaluer $x^{k+1}$. En général, c'est une tache assez difficile, puisqu'il faut calculer $(I + c_k T)^{-1}$. En pratique, au lieu de calculer exactement $P_k(x^k)$, nous évaluerons son approximation. Nous savons que si $\left\|x^{k+1} - P_k(x^k)\right\| \leq \epsilon_k \ \forall k$ avec $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty$, alors la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers une solution de l'inclusion $0 \in T(x)$. De plus, la suite $\{x^k\}$ est régulière asymptotiquement, i.e. $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Pour appliquer l'algorithme du point proximal à l'inégalité variationnelle (IV), prenons

$$T(x) := F(x) + N_C(x),$$

où $N_C(x)$ est le cône normal de $\mathcal{C}$ en $x$, i.e.,

$$N_C(x) = \{w | \langle w, y - x\rangle \leq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}\}.$$

Nous voyons facilement que si $F$ est continue et monotone dans $\mathcal{C}$, alors $T$ est maximale monotone. En effet, $T = F + N_C$ et $N_C$ est maximal monotone.

Dans ce cas, partant d'un point $x^0 \in \mathcal{C}$, l'algorithme du point proximal construit une suite $\{x^k\}$ en prenant $x^{k+1} = (I + c_k T)^{-1}(x^k)$.
D'où $\ x^k \in (I + c_k T)(x^{k+1})$.
En remplaçant $\ T(x^{k+1})$ par $F(x^{k+1}) + N_C(x^{k+1})$,
nous obtenons $\ x^k - x^{k+1} - c_k F(x^{k+1}) \in N_C(x^{k+1})$
ce qui signifie

$$x^{k+1} \in \mathcal{C}, \ \left\langle x^{k+1} + c_k F(x^{k+1}) - x^k, x - x^{k+1}\right\rangle \geq 0 \ \ \forall x \in \mathcal{C}.$$

En effet, $w \in N_C(x^{k+1}) \Leftrightarrow \langle -w, x - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}$,
et $w = x^k - x^{k+1} - c_k F(x^{k+1})$.

Posons $F_k(x) := x + c_k F(x) - x^k$,

nous voyons que $x^{k+1}$ est solution de l'inégalité variationnelle :

$$\langle F_k(x^{k+1}), x - x^{k+1} \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{C}.$$

D'où, si $F$ est monotone, alors $F_k$ est fortement monotone de module $\beta = 1$, et si $F$ est $L$-Lipschitzienne, alors $F_k$ est $L_k$-Lipschitzienne avec $L_k = 1 + c_k L$.

L'algorithme du point proximal pour (IV) peut s'écrire comme suit :

Prendre $x^0 \in \mathcal{C}$ et fixer une suite de nombres positifs $\{c_k\}$ tel que $c_k > c > 0 \; \forall k$.

Pour tout $k = 0, 1, \ldots$, fixer $x^{k+1}$ l'unique solution de
**l'inégalité variationnelle fortement monotone**

$$(IV_k) \begin{cases} \text{trouver } x^{k+1} \in \mathcal{C} \text{ tel que} \\ \langle c_k F(x^{k+1}) + (x^{k+1} - x^k), x - x^{k+1} \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Nous voyons facilement que, si $x^{k+1} = x^k$, alors $x^k$ résoud (IV).
Si l'algorithme ne se termine pas, alors on peut prouver que $\|x^{k+1} - x^k\| \to 0$ quand $k \to +\infty$.
De plus, la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme est bornée et converge faiblement vers une solution du problème (IV) s'il admet une solution.

## 2.3 Description des algorithmes

$\forall x \in \mathcal{C}$, notons $h(x)$ l'unique solution du problème quadratique fortement convexe.

$$(P(x)) \qquad \min_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \tfrac{1}{2}\alpha \left\| y - x \right\|^2 + \langle F(x), y - x \rangle \right\}$$

où $\alpha > 0$ est le paramètre de régulation.

Puisque, $\forall x \in \mathcal{C}$, $(P(x))$ possède une solution unique, $h$ est une fonction univoque dans $\mathcal{C}$. Nous allons montrer que $x^* \in \mathcal{C}$ est une solution de (IV) si et seulement si $h(x^*) = x^*$.

La proposition suivante exprime le fait que si $F$ est fortement monotone et Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$, alors on peut choisir un paramètre de régulation tel que $h$ soit contractive.

**Proposition 1.** *Supposons que la fonction de coût $F$ est $\beta$-fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$. Alors $h$ est contractive dans $\mathcal{C}$ de module*

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}} \tag{2.2}$$

*où $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.*

*Démonstration.* Par la définition de $h$, il suit que

$$h(u) = Pr_{\mathcal{C}}(u - \tfrac{1}{\alpha} F(u))$$

où $Pr_{\mathcal{C}}(v)$ est la projection de $v$ dans $\mathcal{C}$.
En effet, nous savons que,
D'une part,
$x^*$ solution de $\min_{x \in \mathcal{C}} f(x) \Leftrightarrow \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{C}$.

D'où $h(x)$ solution de $\min_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \tfrac{1}{2}\alpha \left\| y - x \right\|^2 + \langle F(x), y - x \rangle \right\}$

$$\Leftrightarrow \langle \alpha(h(x) - x) + F(x), z - h(x) \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}.$$

D'autre part,

$$v = Pr_{\mathcal{C}} t \Leftrightarrow \langle t - v, z - v \rangle \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}.$$

D'où, $h(x) = Pr_{\mathcal{C}}(u - \frac{1}{\alpha} F(u))$

$$\Leftrightarrow \left\langle x - \tfrac{1}{\alpha}F(x) - h(x), z - h(x)\right\rangle \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\Leftrightarrow \left\langle h(x) + \tfrac{1}{\alpha}F(x) - x, z - h(x)\right\rangle \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}.$$

Ce qui implique que $h(u) = Pr_{\mathcal{C}}(u - \frac{1}{\alpha}F(u))$.

Puisque la projection est nonexpansive, nous avons

$$\begin{aligned}\|h(u) - h(u')\|^2 &\leq \left\|u - \tfrac{1}{\alpha}F(x) - (u' - \tfrac{1}{\alpha}F(x'))\right\|^2 \\ &= \|u - u'\|^2 - \tfrac{2}{\alpha}\langle u - u', F(u) - F(u')\rangle + \tfrac{1}{\alpha^2}\|F(u) - F(u')\|^2.\end{aligned}$$

Puisque $F$ est $\beta$-fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$, nous avons

$$\langle u - u', F(u) - F(u')\rangle \geq \beta \|u - u'\|^2$$

et

$$\|F(u) - F(u')\|^2 \leq L \|u - u'\|^2.$$

D'où, nous avons

$$\begin{aligned}\|h(u) - h(u')\|^2 &\leq \|u - u'\|^2 + \tfrac{L^2}{\alpha^2}\|u - u'\|^2 - \tfrac{2\beta}{\alpha}\|u - u'\|^2 \\ &= \left(1 + \tfrac{L^2}{\alpha^2} - \tfrac{2\beta}{\alpha}\right)\|u - u'\|^2.\end{aligned}$$

D'où $h$ est contractive dans $\mathcal{C}$ quand $\left(1 + \frac{L^2}{\alpha^2} - \frac{2\beta}{\alpha}\right) < 1$, c'est-à-dire quand $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.

$\square$

En utilisant cette proposition, nous allons décrire deux algorithmes pour résoudre l'inégalité variationnelle fortement monotone basés sur le principe de contraction de Banach.

$\boxed{\text{ALGORITHME 1}}$

**Pas d'initialisation** Choisir $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$ et une tolérance $\epsilon \geq 0$.

**Pas 0** Prendre $u^0 \in \mathcal{C}$. Poser $k = 0$.

**Pas 1** Résoudre le problème quadratique fortement monotone

$$(P(u^k)) \qquad \min_{z\in C}\left\{\tfrac{1}{2}\alpha\left\|z-u^k\right\|^2+\left\langle F(u^k),z-u^k\right\rangle\right\}$$

pour obtenir son unique solution $u^{k+1}$.

**a)** Si $\frac{\delta^{k+1}}{1-\delta}\left\|u^1-u^0\right\|\leq\epsilon$, terminer l'algorithme :
$u^{k+1}$ est une $\epsilon$-solution de (VI).

**b)** Sinon, mettre $k\leftarrow k+1$ et retourner au Pas 1.

Soit $u^*$ l'unique point fixe de $h$. Puisque $u^{k+1}=h(u^k)$, nous avons

$$\left\|u^{k+1}-u^*\right\|\leq\tfrac{\delta^{k+1}}{1-\delta}\left\|u^1-u^0\right\|$$

où $\delta$ est le coéfficient de contraction de $h$.

Donc, si l'algorithme se termine à l'itération $k$, alors $\left\|u^{k+1}-u^*\right\|\leq\epsilon$. D'où $u^{k+1}$ est une $\epsilon$-solution de (IV). Si $\epsilon=0$, l'algorithme peut ne jamais se terminer. Cependant la suite $\left\{u^{k+1}\right\}$ générée par l'algorithme converge vers l'unique point fixe $u^*$ de $h$, et, par le principe de contraction de Banach, nous avons

$$\left\|u^{k+1}-u^*\right\|\leq\tfrac{\delta^{k+1}}{1-\delta}\left\|u^1-u^0\right\|.$$

*Remarque* 1. De (2.2), nous voyons que le coéfficient de contraction $\delta$ est une fonction du paramètre de régulation $\alpha$. Un calcul élémentaire montre que $\delta$ prend son minimum quand $\alpha=\frac{L^2}{\beta}$. D'où pour la convergence, dans l'algorithme 1, la meilleure façon est de choisir $\alpha=\frac{L^2}{\beta}$.

*Remarque* 2. Quand le module $\beta$ et la constante de Lipschitz $L$ ne sont pas connues à l'avance, nous pouvons justifier les paramètres de régulation $\alpha$ comme suit.
Au départ, nous construisons l'algorithme avec $\alpha=\frac{L_0^2}{\beta_0}$, où $L_0>\beta_0>0$, pour obtenir $u^1=h(u^0)$.
Si $\left\|u^1-u^0\right\|\leq\epsilon$, alors l'algorithme se termine sur un point fixe de $h$.
Sinon, si $\left\|u^1-u^0\right\|>\epsilon>0$, puisque $\left\|u^{j+1}-u^j\right\|\leq\delta^j\left\|u^1-u^0\right\|$ $\forall j$, il suit qu'après $j$-itération avec

$$j \geq \frac{\log(\frac{\epsilon}{\|u^1-u^0\|})}{\log\delta},$$

nous devons avoir $\left\|u^{j+1} - u^j\right\| \leq \epsilon$.

En effet,

$$\begin{aligned}
j &\geq \frac{\log(\frac{\epsilon}{\|u^1-u^0\|})}{\log\delta} \\
j\log\delta &\leq \log(\tfrac{\epsilon}{\|u^1-u^0\|}) \\
\log\delta^j &\leq \log(\tfrac{\epsilon}{\|u^1-u^0\|}) \\
\delta^j &\leq \tfrac{\epsilon}{\|u^1-u^0\|} \\
\delta^j \left\|u^1 - u^0\right\| &\leq \epsilon \\
\left\|u^{j+1} - u^j\right\| &\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Alors l'algorithme peut se terminer. Sinon, il faut augmenter $\alpha$ d'un nombre positif et répéter la procédure.
De cette façon, nous avons éviter de calculer $L$ et $\beta$. Cependant, ce pas rend l'algorithme lent.

Maintenant, revenons au cas où $F$ est continue et monotone mais plus nécessairement fortement monotone dans $\mathcal{C}$.

Pour chaque inégalités variationnelles $(IV_k)$, considérons le problème quadratique fortement convexe :

$$\min_{y\in\mathcal{C}} \left\{ \langle F_k(u), y-u\rangle + \frac{\alpha_k}{2}\|y-u\|^2 \right\} \tag{2.3}$$

où $\alpha_k > 0$.

Puisque $\mathcal{C}$ est convexe et fermé et puisque la fonction objectif est fortement convexe, le problème possède une solution unique pour tout $u$ dans le domaine de $F$.
Soit $h_k(u) : domF \to \mathcal{C}$ cette unique solution du problème (2.3).
Notons que $u^k$ est solution de l'inégalité variationnelle $(IV_k)$ si et seulement si $u^k \in \mathcal{C}$ et $h_k(u) = u^k$.

**Proposition 2.** *Si $F$ est monotone et L-Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$, alors $h_k$ est contractive dans $\mathcal{C}$ avec $\delta_k := \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha_k} + \frac{L_k^2}{\alpha_k^2}}$ quand $\alpha_k > \frac{L_k^2}{2}$ où $L_k = 1 + c_k L$ est la constante de Lipschitz de $F_k$.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $F_k$ qui est fortement monotone dans $\mathcal{C}$ de module $\beta = 1$ et Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$ de constante $L_k = 1 + c_k L$.

□

Par cette proposition, le principe de contraction de Banach peut être appliqué au sous-problème $(IV_k)$ en utilisant l'algorithme 1. C'est-à-dire, nous construisons une suite $\{u^{k,j}\}$ tel que

$$u^{k,j+1} := h_k(u^{k,j}) \qquad j = 0, 1, \ldots$$

où $u^{k,0} \in \mathcal{C}$ a été choisi à l'avance.

Notons que, à chaque itération $j$, évaluer $h_k(u^{k,j})$ signifie résoudre le problème quadratique fortement convexe

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \left\{ \tfrac{1}{2}\alpha_k \left\| u - u^{k,j} \right\|^2 + \left\langle F_k(u^{k,j}), u - u^{k,j} \right\rangle \right\}.$$

Puisque $u^k$ est le point fixe de $h_k$, par le principe de contraction de Banach et le principe du point fixe, nous avons

$$\left\| u^{k+1} - u^k \right\| \leq \frac{\delta_k^{j+1}}{1 - \delta_k} \left\| u^{k,0} - u^{k,1} \right\| \tag{2.4}$$

où $0 < \delta_k < 1$ est le coéfficient de contraction de $h_k$. Par la proposition précédente,

$$\delta_k := \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha_k} + \frac{L_k^2}{\alpha_k^2}}$$

où $L_k = 1 + c_k L$ avec $L$ la constante de Lipschitz de $F$.

De plus, si l'inégalité variationnelle de départ (IV) admet une solution, alors par l'algorithme du point proximal, la suite $\{u^k\}$ converge faiblement vers une solution de (IV) quand la suite $\{c_k\}$ est bornée inférieurement par 0, ce qui signifie $c_k > c > 0 \; \forall k$, où $c$ est un nombre positif.

En pratique, nous résolverons le sous-problème $(IV_k)$ approximativement. C'est-à-dire, nous choisirons d'abord une suite décroissante $\{\epsilon_k\}$ de nombres positifs tel que $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < +\infty$. Donc, au lieu de calculer la solution exacte $u^k$ du sous-problème $(IV_k)$, nous calculerons son approximation $u^{k,j+1}$ tel que $\left\| u^{k,j+1} - u^k \right\| \leq \epsilon_k$.

*Remarque* 3. Par la proposition précédente, le paramètre de régulation doit satisfaire $\alpha_k > \frac{(1+c_k L)^2}{2}$. Pour garantir la convergence pour l'algorithme du point proximal, la suite $\{c_k\}$ doit être bornée inférieurement, i.e. $c_k > c > 0 \; \forall k$. Puisque $c$ est un nombre positif, nous choisissons

$c_k > 0$ assez petit tel que $c_k L < 1$. D'où il suit, par $\alpha_k = \frac{(1+c_kL)^2}{2}$, que $\alpha_k = 1\ \forall k$. Dans ce cas, puique $\delta_k := \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha_k} + \frac{L_k^2}{\alpha_k^2}}$, nous avons

$$\delta_k = \sqrt{1 - 2 + L_k^2} = \sqrt{1 - 2 + (1 + c_kL)^2} = \sqrt{c_k(2L + c_kL^2)}.$$

D'où, si nous choisissons $\alpha_k = 1\ \forall k$, nous pouvons prendre $\delta_k$ petit en prenant $c_k$ petit, mais il doit être borné inférieurement. Un simple calcul montre que la même situation arrive quand $\alpha_k = L_k^2 = (1 + c_kL)^2$.

Motivé par le fait que $x \in \mathcal{C}$ est une solution de (IV) si et seulement s'il est un point fixe de $P_k$, nous dirons que $x \in \mathcal{C}$ est une $\epsilon$-solution de (IV) si $\|x - P_k(x)\| \leq \epsilon$.

L'algorithme pour résoudre (IV) quand $F$ est monotone et Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$ peut être décrit comme suit.

$\boxed{\text{ALGORITHME 2}}$

Choisir une tolérance $\epsilon \geq 0$ et une suite décroissante $\{\epsilon_k\}$ de nombres positifs tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty$. Prendre $x^0 \in \mathcal{C}$ comme point de départ.

**Itération k**

**Pas 0** Prendre $\alpha_k \geq 1$.
Poser $u^{k,0} := x^k$ et $j := 0$.

**Pas 1** Résoudre le problème quadratique fortement convexe

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{1}{2}\alpha_k \left\| u - u^{k,j} \right\|^2 + \left\langle F_k(u^{k,j}), u - u^{k,j} \right\rangle \right\} \tag{2.5}$$

pour obtenir $u^{k,j+1}$.

**a)** Si $u^{k,1} = u^{k,0}$ ou $j \geq \dfrac{\log\left(\frac{\epsilon_k(1-\delta_k)}{\|u^{k,0} - u^{k,1}\|}\right)}{\log \delta_k} - 1$,
alors poser $x^{k+1} := u^{k,j+1}$.

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{En effet,} & j+1 & \geq & \dfrac{\log(\frac{\epsilon_k(1-\delta_k)}{\left\|u^{k,0}-u^{k,1}\right\|})}{\log \delta_k} \\
 & \delta_k^{j+1} & \leq & \frac{\epsilon_k(1-\delta_k)}{\left\|u^{k,0}-u^{k,1}\right\|} \\
 & \frac{\delta_k^{j+1}}{1-\delta_k}\left\|u^{k,0}-u^{k,1}\right\| & \leq & \epsilon_k \\
\text{d'où} & \left\|u^{k,j+1}-u^k\right\| & \leq & \frac{\delta_k^{j+1}}{1-\delta_k}\left\|u^{k,0}-u^{k,1}\right\| \\
 & \left\|u^{k,j+1}-u^k\right\| & \leq & \epsilon_k
\end{array}
$$

où $u^k$ est la solution de $(IV_k)$.

- Si $\left\|x^{k+1}-x^k\right\| + \epsilon_k \leq \epsilon$, alors l'algorithme se termine :
  $x^k$ est une $\epsilon$-solution de (IV).

- Si $\left\|x^{k+1}-x^k\right\| + \epsilon_k > \epsilon$, alors $k := k+1$ et retourner à l'itération $k$.

**b)** Si $u^{k,1} \neq u^{k,0}$ et $j < \dfrac{\log(\frac{\epsilon_k(1-\delta_k)}{\left\|u^{k,0}-u^{k,1}\right\|})}{\log \delta_k} - 1$,
alors $j := j+1$ et retourner au Pas 1.

*Remarque* 4. Par l'algorithme du point proximal, $\left\|x^{k+1}-x^k\right\| \to 0$ quand $k \to +\infty$ si (IV) admet une solution. D'où, si (IV) est résolvable, alors l'algorithme se termine après un nombre fini d'itération pour $\epsilon > 0$, parce que $\epsilon_k \to 0$ quand $k \to +\infty$.

*Remarque* 5. Le principal sous-problème dans cet algorithme est le problème (2.5). Celui-ci peut se réécrire comme

$$\min_{u \in C}\left\{\left\|u-(u^{k,j}-\tfrac{1}{\alpha_k}F_k(u^{k,j}))\right\|^2\right\},$$

ce qui correspond à trouver la projection de $u^{k,j}-\frac{1}{\alpha_k}F_k(u^{k,j})$ dans $C$.

Supposons que (IV) est résolvable.

Montrons que si l'algorithme se termine à l'itération $k$, alors $x^k$ est une $\epsilon$-solution de (IV).
En effet, par construction de $x^{k+1}$, nous avons $\left\|x^{k+1}-P_k(x^k)\right\| \leq \epsilon_k \ \forall k \geq 1$.
Puisque $\left\|P_k(x^k)-x^k\right\| \leq \left\|x^{k+1}-x^k\right\| + \left\|P_k(x^k)-x^{k+1}\right\| \leq \epsilon - \epsilon_k + \epsilon_k = \epsilon$,
$x^k$ est une $\epsilon$-solution de (IV).

Quand $\epsilon = 0$ l'algorithme peut ne jamais se terminer.

Cependant, la convergence est garantie par la convergence de l'algorithme du point proximal et le principe de contraction de Banach. En effet, supposons que $u^k$ soit la solution exacte du sous-problème $(IV_k)$, par l'algorithme du point proximal, la suite $\{u^k\}$ converge faiblement vers une solution $u^*$ de l'inégalité variationnelle (IV). Pour tout $w \in \mathcal{H}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle w, x^k \rangle - \langle w, x^* \rangle &= \langle w, x^k - u^k \rangle - \langle w, u^k - x^* \rangle \\
&\leq \|w\| \left\| u^k - x^k \right\| + \langle w, u^k - x^* \rangle \\
&\leq \epsilon_k \|w\| + \langle w, u^k - x^* \rangle.
\end{aligned}$$

Puisque $\epsilon_k \to 0$ et $u^k$ converge faiblement vers $u^*$, il suit que la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers $x^*$.

# Chapitre 3

# Les inégalités variationnelles univoques mixtes

## 3.1 Introduction

Soit $\mathcal{H}$ un espace réel de Hilbert, où $\langle .,. \rangle$ décrit le produit scalaire et où $\|.\|$ décrit la norme.
Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de $\mathcal{H}$ non vide, fermé et convexe.
Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ une fonction monotone.
Soit $\varphi$ une fonction de $\mathcal{H}$ fermée, propre et convexe.

Considérons l'**inégalité variationnelle mixte** suivante :

$$(VI_G) \left\{ \begin{array}{ll} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \ \text{ tel que} & \\ \langle F(x^*), x - x^* \rangle + \varphi(x) - \varphi(x^*) \geq 0 & \quad \forall x \in \mathcal{C}. \end{array} \right.$$

Dans cette section, nous utiliserons l'approche du point fixe pour le problème d'inégalité variationnelle $(VI_G)$ en utilisant une extension de la projection.
En réalité, pour résoudre le problème d'inégalité variationnelle $(VI_G)$, au lieu de considérer le problème de minimisation de la fonction y correspondant sur $\mathcal{C}$, nous considérerons le problème de point fixe d'une fonction marginale, donnée comme la solution du problème mathématique qui évalue la fonction associée.
En choisissant correctement les opérateurs de régulation, nous montrerons que la fonction marginale est contractive dans $\mathcal{C}$ quand $F$ est fortement monotone ou quand $\varphi$ est fortement convexe.
Tous les résultats montrent qu'une solution de l'inégalité variationnelle $(VI_G)$ peut être obtenue

par le principe de contraction de Banach, où la convergence est facilement obtenue.

Du point de vue calculatoire, pour résoudre les inégalités variationnelles, il faut que les inégalités variationnelles fortement monotones qui apparaissent, soient des sous-problèmes.

D'où, dans les algorithmes des sous-problèmes, à chaque itération $k$, les problèmes fortement convexes sont de la forme :

$$\min_{x \in C} \left\{ \frac{1}{2}(x - x^k)^T G(x - x^k) + \left\langle F(x^k), x - x^k \right\rangle + \varphi(x) \right\}$$

où, quand $\varphi$ est différentiable, la fonction objectif des sous-problèmes est sous la forme quadratique suivante :

$$\min_{x \in C} \left\{ \frac{1}{2}(x - x^k)^T G(x - x^k) + \left\langle F(x^k) + \nabla\varphi(x^k), x - x^k \right\rangle \right\}$$

où $G$ est une matrice symétrique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

Cette partie s'organise de cette façon. Dans la prochaine section, nous rappelerons et prouverons quelques résultats de co-coercivité. Ensuite, nous montrerons comment choisir l'opérateur de régulation pour que la fonction marginale soit contractive, quand $F$ est fortement monotone ou quand $\varphi$ est fortement convexe. La quatrième section étudie les fonctions nonexpansives lorsque la fonction coût est co-coercive. Dans la dernière section, nous décrirons les algorithmes.

## 3.2 Préliminaires

Notons que, si $\varphi$ est différentiable dans $\mathcal{C}$, alors, comme $\varphi$ est semi-continue inférieurement, l'inégalité variationnelle $(VI_G)$ est équivalente à celle-ci :

Trouver $x^* \in \mathcal{C}$ tel que

$$\langle F(x^*) + \nabla\varphi(x^*), x - x^*\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{C}. \tag{3.1}$$

Pour le problème $(VI_G)$, nous considérons la fonction suivante :

$$g(x) = -\min_{y\in\mathcal{C}} \left\{ \langle F(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle y - x, G(y - x)\rangle + \varphi(y) - \varphi(x) \right\} \tag{3.2}$$

où $G$ est une matrice symétrique, positive, linéaire et bornée de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

Quand $\varphi$ est différentiable, nous utiliserons le problème (6) pour obtenir la fonction de projection suivante :

$$g_1(x) = -\min_{y\in\mathcal{C}} \left\{ \langle F(x) + \nabla\varphi(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle y - x, G(y - x)\rangle \right\}. \tag{3.3}$$

Notons que la fonction objectif du problème qui évalue $g_1(x)$ est toujours quadratique et fortement convexe.

Puisque $\mathcal{C}$ est fermé et convexe et puisque les fonctions objectifs sont fortement convexes, les problèmes (3.2) et (3.3) sont toujours résolvables pour tout $x \in \mathcal{C}$. Soit $h(x)$ et $h_1(x)$ l'unique solution des problèmes (3.2) et (3.3) respectivement.
Observons que, quand $\varphi$ est une fonction constante, $h(x)$ et $h_1(x)$ coïncident, i.e. $h(x) = h_1(x)$ $\forall x \in \mathcal{C}$. Mais en général, $h \not\equiv h_1$. Cependant, $h$ et $h_1$ ont une propriété commune : $x^*$ est solution de l'inégalité varitionnelle $(VI_G)$ si et seulement si $h(x^*) = h_1(x^*) = x^*$.

**Lemme 2.** *Supposons que l'inégalité variationnelle $(VI_G)$ admette une solution. Alors $x^*$ est une solution de $(VI_G)$ $\Leftrightarrow$ $x^*$ est un point fixe de $h$. Ceci reste valable pour $h_1$.*

*Démonstration.* $\boxed{\Rightarrow \text{Supposons que } x^* \text{ est solution de } (VI_G).}$

Soit $h(x^*)$ l'unique solution du problème qui évalue $g(x^*)$.
Alors

$$\langle F(x^*), h(x^*) - x^*\rangle + \varphi(h(x^*)) - \varphi(x^*) \geq 0. \tag{3.4}$$

Puisque $h(x^*)$ est solution du problème convexe qui évalue $g(x^*)$,
$\exists\ z^* \in \partial\varphi(h(x^*))$ tel que

$$\langle F(x^*) + G(h(x^*) - x^*) + z^*, y - h(x^*)\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{C}. \tag{3.5}$$

Remplaçons $y$ par $x^*$ dans cette inégalité, nous obtenons

$$\langle F(x^*) + G(h(x^*) - x^*) + z^*, x^* - h(x^*)\rangle \geq 0. \tag{3.6}$$

Additionnons (3.4) et (3.6)

$$\langle G(h(x^*) - x^*), x^* - h(x^*)\rangle + \langle z^*, x^* - h(x^*)\rangle + \varphi(h(x^*)) - \varphi(x^*) \geq 0. \tag{3.7}$$

Puisque $z^* \in \partial\varphi(h(x^*))$, nous avons

$$\langle z^*, x^* - h(x^*)\rangle \leq \varphi(x^*) - \varphi(h(x^*)). \tag{3.8}$$

De par (3.7) et (3.8), il suit que

$$\langle G(h(x^*) - x^*), x^* - h(x^*)\rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}.$$

D'où $h(x^*) = x^*$, car $G$ est symétrique et positive.

$\boxed{\Leftarrow \text{ Supposons que } h(x^*) = x^*.}$

Par (3.5), nous avons

$$\langle F(x^*) + z^*, y - x^*\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{C}.$$

Puisque $z^* \in \partial\varphi(h(x^*))$, nous avons

$$\langle z^*, y - x^*\rangle \leq \varphi(y) - \varphi(x^*) \qquad \forall y \in \mathcal{C}.$$

En additionnant les deux dernières inégalités, nous obtenons

$$\langle F(x^*), y - x^*\rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{C}.$$

ce qui signifie que $x^*$ est solution du problème $(VI_G)$.

□

**Définition 7.** Une fonction $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ est co-coercive de module $\delta > 0$ ($\delta$-co-coercive) dans $\mathcal{C}$ si

$$\langle \varphi(x) - \varphi(x'), x - x' \rangle \geq \delta \left\| \varphi(x) - \varphi(x') \right\|^2 \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}.$$

**Définition 8.** Une fonction $f$ à valeurs réelles est $\delta$-co-coercive dans $\mathcal{C}$ si son gradient $\nabla f$ est $\delta$-co-coercive dans $\mathcal{C}$, i.e.

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(x'), x - x' \rangle \geq \delta \left\| \nabla f(x) - \nabla f(x') \right\|^2 \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}.$$

Il est facile de voir qu'une fonction co-coercive est Lipschizienne et qu'une fonction Lipschitzienne et fortement monotone est co-coercive. Une autre propriété nous dit qu'une fonction $f$ est convexe et son gradient est Lipschitzien dans $\mathcal{C}$ si et seulement si $\nabla f$ est co-coercif.

## 3.3 Une approche au point fixe

Dans cette section, nous supposerons que la matrice $G = \alpha I$ avec $\alpha > 0$ et $I$ l'indentité.

Nous nous intéresserons d'abord à la fonction $h$. Dans ce cas, la fonction convexe $\varphi$ ne requiert pas d'hypothèses de différentiabilité.

**Lemme 3.** *Soit $h(x)$ l'unique solution du problème convexe (3.2)*
$g(x) = -\min_{y\in\mathcal{C}}\left\{\langle F(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle y-x, G(y-x)\rangle + \varphi(y) - \varphi(x)\right\}.$
*Alors*

$$\|h(x) - h(x')\|^2 \leq \left\|x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x'))\right\|^2.$$

*Démonstration.* Puisque $G$ est symétrique et puisque $\varphi$ est convexe dans $\mathcal{C}$, le problème (3.2) est fortement convexe. Donc, $h(x)$ est l'unique solution du problème sans contrainte

$$\min_{y\in\mathcal{H}}\left\{\tfrac{1}{2}\langle y-x, G(y-x)\rangle + \langle F(x), y-x\rangle + \varphi(y) - \varphi(x) + \delta_{\mathcal{C}}(y)\right\}.$$

où $\delta_{\mathcal{C}}(y)$ est la fonction indicatrice de $\mathcal{C}$.

D'où nous avons

$$0 \in G(h(x) - x) + F(x) + N_{\mathcal{C}}(h(x)) + \partial\varphi(h(x)). \tag{3.9}$$

En effet,
Soit $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x) + \delta_{\mathcal{C}}(x)\}$, où $f$ est convexe, alors

$$\begin{aligned} x \text{ solution } &\Leftrightarrow 0 \in \partial\left[f + \delta_{\mathcal{C}}\right](x)\\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x) + \partial\delta_{\mathcal{C}}(x)\\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x) + N_{\mathcal{C}}(x).\end{aligned}$$

(3.9) implique qu'il existe $z_1 \in N_{\mathcal{C}}(h(x))$ et $z_2 \in \partial\varphi(h(x))$ tel que

$$G(h(x) - x) + F(x) + z_1 + z_2 = 0$$

où $N_{\mathcal{C}}(h(x))$ est le cône normal de $\mathcal{C}$ en $h(x)$.

Puisque $G = \alpha I$, il suit que

$$h(x) = x - \frac{1}{\alpha}F(x) - \frac{1}{\alpha}z_1 - \frac{1}{\alpha}z_2. \tag{3.10}$$

De la même façon, nous obtenons

$$h(x') = x' - \frac{1}{\alpha}F(x') - \frac{1}{\alpha}z_1' - \frac{1}{\alpha}z_2'. \tag{3.11}$$

D'où, nous pouvons écrire

$$\|h(x) - h(x')\|^2 = \langle h(x) - h(x'), h(x) - h(x') \rangle$$

$$= \left\langle x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x')) - \tfrac{1}{\alpha}(z_1 - z_1') - \tfrac{1}{\alpha}(z_2 - z_2'), h(x) - h(x') \right\rangle.$$

Puisque le sous-différentiel d'une fonction convexe est monotone, nous avons

$$\langle z_1 - z_1', h(x) - h(x') \rangle \geq 0 \quad \forall z_1 \in N_C(h(x)), z_1' \in N_C(h(x'));$$

$$\langle z_2 - z_2', h(x) - h(x') \rangle \geq 0 \quad \forall z_2 \in \partial\varphi(h(x)), z_1' \in \partial\varphi(h(x')).$$

D'où

$$\|h(x) - h(x')\|^2 \leq \left\langle x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x')), h(x) - h(x') \right\rangle$$

$$\leq \left\| x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x')) \right\| \|h(x) - h(x')\|.$$

Donc $$\|h(x) - h(x')\| \leq \left\| x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x')) \right\|.$$

□

Maintenant considérons l'inégalité variationnelle $(VI_G)$ où soit $F$ est fortement monotone ou soit $\varphi$ est fortement convexe dans $C$. Dans ce cas, la fonction $h$, qui est la solution unique du problème (3.2), est contractive dans $C$.

**Théorème 1.** *(i) Si $F$ est $\beta$-fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $C$, alors $h$ est contractive dans $C$ de module*

$$\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$$

*où $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.*

*(ii) Si $\varphi$ est $\rho$-fortement convexe, alors $h$ est contractive dans $C$ de module*

$$\delta := \frac{\sqrt{L^2 + \alpha^2}}{\alpha + \rho}$$

*quand $\alpha > \frac{L^2 - \rho^2}{2\rho}$.*

*Démonstration.* $(i)$ Supposons que $F$ est $\beta$-fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$. Par

$$\left\|x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x'))\right\|$$

$$= \|x - x'\|^2 - \tfrac{2}{\alpha}\langle x - x', F(x) - F(x')\rangle + \tfrac{1}{\alpha^2}\|F(x) - F(x')\|^2 .$$

Par le lemme précédent, il suit que

$$\left\|h(x) - h(x')\right\|^2 \leq \left\|x - x'\right\|^2 - \frac{2}{\alpha}\left\langle x - x', F(x) - F(x')\right\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\left\|F(x) - F(x')\right\|^2 .$$

Puisque $F$ est $\beta$-fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$, nous avons

$$\left\langle x - x', F(x) - F(x')\right\rangle \geq \beta\left\|x - x'\right\|^2$$

et

$$\left\|F(x) - F(x')\right\|^2 \leq L^2\left\|x - x'\right\|^2 .$$

Donc

$$\|h(x) - h(x')\|^2 \leq \|x - x'\|^2 - \tfrac{2\beta}{\alpha}\|x - x'\|^2 + \tfrac{L^2}{\alpha^2}\|x - x'\|^2$$

$$= \left(1 - \tfrac{2\beta}{\alpha} + \tfrac{L^2}{\alpha^2}\right)\|x - x'\|.$$

D'où $$\|h(x) - h(x')\| \leq \sqrt{1 - \tfrac{2\beta}{\alpha} + \tfrac{L^2}{\alpha^2}}\,\|x - x'\| .$$

Clairement, si $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, alors $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}} < 1$.
D'où $h$ est contractive dans $\mathcal{C}$ de module $\delta$.

$(ii)$ Supposons que $\varphi$ est $\rho$-fortement convexe dans $\mathcal{C}$. De (3.10) et (3.11) dans le lemme (3), il suit que

$$\left\|h(x) - h(x')\right\|^2 \leq \left\langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(F(x) - F(x')), h(x) - h(x')\right\rangle - \frac{1}{\alpha}\left\langle z_2 - z_2', h(x) - h(x')\right\rangle \tag{3.12}$$

où $z_2 \in \partial\varphi(h(x)), z_2' \in \partial\varphi(h(x'))$.

Comme $\varphi$ est $\rho$-fortement convexe, nous avons

$$\langle z_2 - z_2', h(x) - h(x') \rangle \geq \rho \left\| h(x) - h(x') \right\|^2 .$$

d'où, par (3.12), il suit que

$$\|h(x) - h(x')\|^2 \leq \langle x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x')), h(x) - h(x') \rangle - \tfrac{\rho}{\alpha} \|h(x) - h(x')\|^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + \tfrac{\rho}{\alpha}) \|h(x) - h(x')\|^2 \leq \langle x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x')), h(x) - h(x') \rangle$$

$$\leq \left\| x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x')) \right\| \|h(x) - h(x')\|$$

$$\Leftrightarrow (1 + \tfrac{\rho}{\alpha})^2 \|h(x) - h(x')\|^2 \leq \left\| x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(F(x) - F(x')) \right\|^2$$

$$= \|x - x'\|^2 + \tfrac{1}{\alpha^2} \|F(x) - F(x')\|^2 - \tfrac{2}{\alpha} \langle x - x', F(x) - F(x') \rangle .$$

Puisque $F$ est Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$ de constante $L > 0$, et monotone dans $\mathcal{C}$, nous avons

$$\left\| F(x) - F(x') \right\| \leq L \left\| x - x' \right\| \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}$$

$$\langle F(x) - F(x'), x - x' \rangle \geq 0 \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} (1 + \tfrac{\rho}{\alpha})^2 \|h(x) - h(x')\|^2 &\leq \|x - x'\|^2 + \tfrac{L^2}{\alpha^2} \|x - x'\|^2 \\ &= \left(1 + \tfrac{L^2}{\alpha^2}\right) \|x - x'\|^2 . \end{aligned}$$

D'où

$$\left\| h(x) - h(x') \right\| \leq \frac{\sqrt{L^2 + \alpha^2}}{\alpha + \rho} \left\| x - x' \right\| .$$

Clairement, $\delta := \frac{\sqrt{L^2+\alpha^2}}{\alpha+\rho} < 1$ quand $\alpha > \frac{L^2-\rho^2}{2\rho}$.

□

Maintenant, supposons que $\varphi$ est différentiable dans un ensemble ouvert contenant $\mathcal{C}$. Comme nous l'avons déjà mentionné, la fonction objectif du problème (3.3) pour évaluer $g_1(x)$ est toujours quadratique.

Soit $\phi := F + \nabla\varphi$.

Alors, par (3.3), $h_1(x)$ est l'unique solution du problème quadratique fortement convexe

$$\min_{y\in C}\left\{\langle\phi(x), y-x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2\right\}$$

qui peut se réécrire

$$\min_{y\in C}\left\{\left\|y-(x-\frac{1}{\alpha}\phi(x))\right\|^2\right\}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\left\|y-(x-\tfrac{1}{\alpha}\phi(x))\right\|^2 &= \left\|\tfrac{1}{\alpha}\phi(x)+(y-x)\right\|^2\\
&= \|y-x\|^2 + \tfrac{2}{\alpha}\langle\phi(x), y-x\rangle + \tfrac{1}{\alpha^2}\|\phi\|^2\\
&= \langle\phi(x), y-x\rangle + \tfrac{\alpha}{2}\|y-x\|^2 + \underbrace{\frac{1}{2\alpha}\|\phi\|^2}_{\text{constante}}.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne $h_1(x) = Pr_C(x - \frac{1}{\alpha}\phi(x))$.
Et nous savons que la projection est nonexpansive, i.e.

$$\left\|Pr_C(x) - Pr_C(x')\right\| \le \left\|x-x'\right\| \qquad \forall x, x' \in \mathcal{H}.$$

**Corollaire 1.** *Supposons que si $F$ est fortement monotone ou si $\varphi$ est fortement convexe, et si $F+\varphi$ est L-Lipschitzienne dans $C$. Alors on peut choisir un paramètre de régulation $\alpha$ tel que $h_1$ soit contractive dans $C$.*
*C'est-à-dire*

*(i) Si $F$ est $\beta$-fortement monotone dans $C$, alors $h_1$ est contractive dans $C$ quand $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.*

*(ii) Si $\varphi$ est $\rho$-fortement convexe dans $C$, $h_1$ est contractive dans $C$ quand $\alpha > \frac{L^2}{2\rho}$.*

*Démonstration.* (*i*) Supposons que $F$ est fortement monotone.

Par simplicité de notation, nous noterons $h_1$ au lieu de $h_1(x)$, $h_1'$ au lieu de $h_1(x')$, et les mêmes conventions pour $F$,$\nabla\varphi$ et $\phi$.

En utilisant la propriété de nonexpansivité de la projection, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|h_1 - h_1'\|^2 &\leq \left\|x - \tfrac{1}{\alpha}(F + \nabla\varphi) - (x' - \tfrac{1}{\alpha}(F' + \nabla\varphi'))\right\|^2 \\ &= \|x - x'\|^2 - \tfrac{2}{\alpha}\langle x - x', F - F'\rangle - \tfrac{2}{\alpha}\langle x - x', \nabla\varphi - \nabla\phi'\rangle \\ &\quad + \tfrac{1}{\alpha^2} \underbrace{\left\|\phi - \phi'\right\|^2}_{\|F+\nabla\varphi-(F+\nabla\varphi')\|^2} .\end{aligned}$$

Puisque $F$ est $\beta$-fortement monotone et $F + \nabla\varphi$ est $L$-Lipschitzienne, nous avons

$$\left\langle x - x', F - F'\right\rangle \geq \beta \left\|x - x'\right\|^2$$

et

$$\left\|(F + \nabla\varphi) - (F' + \nabla\varphi')\right\|^2 \leq L^2 \left\|x - x'\right\|^2.$$

Donc, par la monotonicité de $\nabla\varphi$, il suit que

$$\begin{aligned}\|h_1 - h_1'\|^2 &\leq \|x - x'\|^2 + \tfrac{L^2}{\alpha^2} + \|x - x'\|^2 - \tfrac{2\beta}{\alpha}\|x - x'\|^2 \\ &= \left(1 + \tfrac{L^2}{\alpha^2} - \tfrac{2\beta}{\alpha}\right)\|x - x'\|^2 .\end{aligned}$$

Ce qui implique que $h_1$ est contractive quand $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.

(*ii*) Supposons que $\varphi$ est $\rho$-fortement convexe dans $\mathcal{C}$.

Alors pour tout $x, x' \in \mathcal{C}$, nous avons

$$\varphi(x) \geq \varphi(x') + \left\langle\nabla\varphi(x'), x - x'\right\rangle + \frac{\rho}{2}\left\|x - x'\right\|^2$$

$$\varphi(x') \geq \varphi(x) + \left\langle\nabla\varphi(x), x' - x\right\rangle + \frac{\rho}{2}\left\|x - x'\right\|^2.$$

Additionnant ces deux inégalités, nous voyons que $\nabla\varphi$ est $\rho$-fortement monotone dans $\mathcal{C}$. Le reste de la preuve découle de la partie (*i*).

□

## 3.4 La nonexpansivité

Dans cette section, nous supposons $F$ co-coercive et plus fortement monotone. L'inégalité variationnelle possède donc plusieurs solutions. On ne s'attend donc plus à trouver un $\alpha > 0$ tel que $h$ soit contractive.

**Théorème 2.** *Supposons que $F$ est $\delta$-co-coercive dans $C$ avec $\alpha \geq \frac{1}{2\delta}$. Alors $h$ est nonexpansive dans $C$, i.e.*

$$\left\|h(x) - h(x')\right\| \leq \left\|x - x'\right\| \qquad \forall x, x' \in C.$$

*Démonstration.* Pour tout $x, x'$

$$\left\|x - x' - \frac{1}{\alpha}(F(x) - F(x'))\right\|^2$$
$$= \left\|x - x'\right\|^2 - \frac{2}{\alpha}\left\langle x - x', F(x) - F(x')\right\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\left\|F(x) - F(x')\right\|^2.$$

Puisque $F$ est $\delta$-co-coercive dans $C$ et $\alpha \geq \frac{1}{2\delta}$, nous avons

$$\langle x - x', F(x) - F(x')\rangle \geq \tfrac{1}{2\alpha}\left\|F(x) - F(x')\right\|^2 \qquad \forall x, x' \in C.$$

D'où

$$\left\|x - x' - \frac{1}{\alpha}(F(x) - F(x'))\right\|^2 \leq \left\|x - x'\right\|^2$$
$$\left\|x - x' - \frac{1}{\alpha}(F(x) - F(x'))\right\| \leq \left\|x - x'\right\|. \tag{3.13}$$

Par le lemme (3) et l'inégalité (3.13), il suit que

$$\|h(x) - h(x')\| \leq \|x - x'\| \qquad \forall x, x' \in C.$$

□

Comme précédemment quand $\varphi$ est différentiable, nous avons le résultat suivant qui est une conséquence de ce théorème.

**Corollaire 2.** *Supposons que $\phi := F + \nabla\varphi$ est $\Delta$-co-coercive dans $C$. Alors $h_1$ est nonexpansive dans $C$ quand $\alpha > \frac{1}{2\Delta}$.*

*Démonstration.* Utilisant la nonexpansivité de la projection, nous avons

$$\begin{aligned}
\|h_1 - h_1'\|^2 &\leq \left\|x - \tfrac{1}{\alpha}\phi - (x' - \tfrac{1}{\alpha}\phi')\right\|^2 \\
&= \left\|x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(\phi' - \phi)\right\|^2 \\
&= \|x - x'\|^2 - \tfrac{2}{\alpha}\langle x - x', \phi - \phi'\rangle + \tfrac{1}{\alpha^2}\|\phi - \phi'\|^2 .
\end{aligned}$$

Puisque $\phi$ est $\Delta$-co-coercive,

$$\langle x - x', \phi - \phi'\rangle \geq \Delta \|\phi - \phi'\|^2 .$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|h_1 - h_1'\|^2 &\leq \|x - x'\|^2 - \tfrac{2\Delta}{\alpha}\|\phi - \phi'\|^2 + \tfrac{1}{\alpha^2}\|\phi - \phi'\|^2 \\
&= \|x - x'\|^2 + \left(\tfrac{1}{\alpha^2} - \tfrac{2\Delta}{\alpha}\right)\|\phi - \phi'\|^2
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|h_1 - h_1'\| \leq \|x - x'\|$$

quand $\alpha > \frac{1}{2\Delta}$.

□

Appliquons le théorème (2) quand $F \equiv 0$.

**Corollaire 3.** *Supposons que $\varphi$ est convexe et que son gradient $\nabla\varphi$ est L-Lipschitzien dans $C$. Soit $h_1(x)$ la solution du problème quadratique fortement convexe*

$$\min_{x \in C}\left\{\langle \nabla\varphi(x), y\rangle + \alpha \|y - x\|^2\right\}$$

*avec $\alpha > \frac{L}{2}$. Alors $h_1$ est nonexpansive dans $C$ et $x^* = h_1(x^*)$ si et seulement si $x^*$ est solution du problème convexe*

$$\min_{x \in C}\{\varphi(x)\} .$$

*Remarque* 6. Quand $F \equiv 0$, l'inégalité variationnelle $(VI_G)$ se réduit au problème convexe

$$\min_{x \in C} \{\varphi(x)\}.$$

**Corollaire 4.** *Pour tout $x$, soit $h$ l'unique solution du problème fortement convexe*

$$\min_{y \in C} \left\{\varphi(y) + \alpha \|y - x\|^2\right\}.$$

*Alors pour tout $\alpha > 0$, $h$ est nonexpansive dans $C$ et $x^*$ est solution si et seulement s'il est point fixe de $h$.*

## 3.5 Description des algorithmes

Les résultats annoncés dans les sections précédentes mènent à des algorithmes résolvant l'inégalité variationnelle généralisée $(VI_G)$ via le principe de contraction de Banach.
Nous savons que si $F$ est fortement monotone ou si $\varphi$ est fortement convexe dans $\mathcal{C}$, nous pouvons choisir un paramètre de régulation tel que la fonction $h$ soit contractive dans $\mathcal{C}$. Ce résultat est valable pour $h_1$ quand $\varphi$ est différentiable. Dans ce cas, par le principe de contraction de Banach, l'unique point fixe de $h$ et de $h_1$ peut s'écrire comme

$$x^{k+1} = h(x^k) \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\text{ou} \quad x^{k+1} = h_1(x^k) \quad k = 0, 1, \dots$$

où $x^0$ est le point de départ dans $\mathcal{C}$.
Suivant la définition de $h$ et de $h_1$, évaluer $h(x^k)$ et $h_1(x^k)$ requiert la résolution des problèmes fortement convexes (3.2) et (3.3).

Les algorithmes peuvent être décrit comme suit

$\boxed{\text{ALGORITHME 1}}$

Choisir une tolérance $\epsilon \geq 0$.

Si $F$ est $\beta$-fortement monotone, choisir $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.

Si $\varphi$ est $\rho$-fortement convexe, choisir $\alpha > \frac{L^2-\rho^2}{2\beta}$.

où $L$ est la constante de Lipschitz.

Sélectionner $x^0 \in \mathcal{C}$

**Itération k**

Résoudre le problème fortement convexe

$$\min_{x \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{1}{2}\alpha \left\| x - x^k \right\|^2 + \left\langle F(x^k), x - x^k \right\rangle + \varphi(x) \right\} \tag{3.14}$$

pour obtenir sa solution unique $x^{k+1}$.

**a)** Si $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leq \epsilon$, alors l'algorithme se termine :
$x^k$ est une $\epsilon$-solution de l'inégalité variationnelle $(VI_G)$.

**b)** Sinon, si $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| > \epsilon$, alors retourner à l'itération $k$ avec $k := k+1$.

Par le théorème (1) et le principe de contraction de Banach, si l'algorithme ne se termine pas après un nombre fini d'itérations, alors la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme converge fortement vers l'unique solution $x^*$ de l'inégalité variationnelle $(VI_G)$. De plus, à chaque itération $k$, nous avons

$$\left\|x^{k+1} - x^*\right\| \leq \tfrac{\delta^{k+1}}{1-\delta} \left\|x^0 - x^1\right\|$$

où $0 < \delta < 1$ est le module de contraction de $h$.

Suivant le théorème (1), $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$ quand $F$ est $\beta$-fortement monotone, et $\delta := \frac{\sqrt{L^2+\alpha^2}}{\alpha+\rho}$ quand $\varphi$ est $\rho$-fortement convexe.

De plus, $\left\|x^{k+1} - x^*\right\| \leq \delta\left\|x^k - x^*\right\|$ avec $0 < \delta < 1$.

Donc, la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme converge linéairement vers $x^*$.

Le point principal ici est de choisir le paramètre de régulation $\alpha$ tel que $h$ soit contractive.

$\boxed{\text{ALGORITHME 2}}$

Choisir une tolérance $\epsilon \geq 0$.

Si $F$ est $\beta$-fortement monotone, choisir $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.

Si $\varphi$ est $\rho$-fortement convexe, choisir $\alpha > \frac{L^2-\rho^2}{2\beta}$.

où $L$ est la constante de Lipschitz.

Sélectionner $x^0 \in C$

**Itération k**

Résoudre le problème fortement convexe

$$\min_{x \in C} \left\{ \frac{1}{2}\alpha \left\| x - x^k \right\|^2 + \left\langle F(x^k) + \nabla\varphi(x^k), x - x^k \right\rangle \right\} \tag{3.15}$$

pour obtenir sa solution unique $x^{k+1}$.

a) Si $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| \leq \epsilon$, alors l'algorithme se termine :
$x^k$ est une $\epsilon$-solution de l'inégalité variationnelle $(VI_G)$.

b) Sinon, si $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| > \epsilon$, alors retourner à l'itération $k$ avec $k := k+1$.

Comme précédemment, la suite $\left\{x^k\right\}$ générée par l'algorithme converge fortement vers l'unique solution de l'inégalité variationnelle $(VI_G)$.

En résumé, nous avons utilisé le principe du point fixe pour résoudre les inégalités variationnelles monotones. Nous avons montré comment choisir les paramètres de régulation tel que la projection soit contractive sous les hypothèses de forte monotonicité, de nonexpansivité et de co-coercivité. Ces résultats mènent à la méthode de contraction de Banach pour résoudre les inégalités variationnelles générales comprenant la forte monotonicité et la co-coercivité.

# Chapitre 4

# Les inégalités variationnelles multivoques

## 4.1 Introduction

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide, fermé et convexe dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
Soit $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ une fonction multivoque.

Considérons l'**inégalité variationnelle multivoque** suivante :

$$(\mathrm{VI}) \begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C}, w^* \in F(x^*) \text{ tel que} \\ \langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $\langle .,. \rangle$ décrit le produit scalaire dans $\mathcal{H}$ et $\|.\|$ décrit la norme.

L'ensemble $\mathcal{C}$ est appelé le domaine admissible et la fonction $F$ est appelée la fonction coût de (VI).

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre (VI) avec $F$ une fonction monotone multivoque. La méthode la plus simple est celle de la projection. A chaque itération $k$ de cette méthode, un point $x^k \in \mathcal{C}$ et un point $w^k \in F(x^k)$ sont calculés et un vecteur $x^k - t_k w^k$, avec un pas $t_k > 0$, est projeté sur le domaine admissible $\mathcal{C}$.

La méthode la plus puissante pour résoudre l'inclusion $0 \in T(x)$, qui comprend (VI) comme un cas particulier, est la méthode du point proximal. Celle-ci converge faiblement sans ajouter d'hypothèses de monotonicité sur $T$. La procédure du point proximal consiste en une construction de suite $\{x^k\}$ donnée par $x^{k+1} := P_k(x^k)$, où $P_k$ est l'opérateur proximal défini par $P_k := (I + c_k T)^{-1}$, avec $c_k > 0$.

Pour le cas de l'inégalité variationnelle monotone (VI), nous prenons $T$ défini par

$$T(x) := \begin{cases} F(x) + N_C(x) & \text{si } x \in domF \\ \emptyset & \text{si } x \notin domF \end{cases}$$

où $N_C(x)$ est le cône normal de $\mathcal{C}$ en $x$, i.e.,

$$N_C(x) = \{w | \langle w, y - x \rangle \leq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}\}.$$

Nous montrerons que, si (VI) admet une solution, alors, partant de $x^0 \in \mathcal{C}$, la suite de points $x^k, k = 0, 1, \ldots$, générée par l'algorithme du point proximal converge faiblement vers une solution de (VI) quand la suite $\{c_k\}$ est bornée supérieurement par 0.

Pour la convergence, la méthode du point proximal ne requiert pas d'hypothèses supplémentaires sur la monotonicité. Cependant, du point de vue de l'implémentation, calculer les itérées est généralement difficile, puisqu'il requiert l'évaluation de l'opérateur proximal $(I + c_k T)^{-1}$ à chaque point d'itération $x^k$. Et calculer chaque point $x^k$ revient à résoudre une inégalité variationnelle fortement monotone.

Nous savons que l'unique solution d'une inégalité variationnelle univoque, fortement monotone peut être calculée en trouvant l'unique point fixe d'une fonction contractive.

Dans cette section nous procéderons comme ceci. D'abord, nous résolverons l'inégalité variationnelle multivoque fortement monotone grâce au principe de contraction de Banach. Ensuite, nous montrerons comment coupler l'algorithme obtenu avec la méthode du point proximal pour résoudre l'inégalité variationnelle monotone (et plus forcément fortement monotone). Ceci impliquera un algorithme convergeant pour résoudre (VI) monotone, où l'évaluation de l'opérateur proximal à chaque itération peut être implémentée en calculant la projection dans le domaine admissible $\mathcal{C}$, ce qui revient à minimiser une fonction quadratique fortement monotone dans $\mathcal{C}$.

Cette partie s'organise de cette façon. D'abord nous définirons quelques préliminaires. Ensuite nous décrirons les algorithmes utilisant le principe de contraction de Banach pour résoudre (VI) quand $F$ est une fonction multivoque fortement monotone et Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$. Pour finir, nous décrirons un algorithme couplant la méthode du point proximal et le principe de contraction de Banach pour résoudre (VI) quand $F$ est une fonction multivoque monotone et Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$.

## 4.2 Préliminaires

Soit $T : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$.

**Définition 9.** Soit $domT = \{x \in \mathcal{H} | T(x) \neq \emptyset\}$ le domaine de $T$.
Soit $graphT = \{(x, w) | w \in T(x)\}$ le graphe de $T$.

Supposons que $\mathcal{C} \subseteq domT$.

**Définition 10.** $T$ est monotone dans $\mathcal{C}$ si

$$\langle z - z', x - x' \rangle \geq 0 \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}, \forall z \in T(x), \forall z' \in T(x').$$

**Définition 11.** $T$ est maximal monotone s'il est monotone et si son graphe n'est pas contenu proprement dans le graphe d'une autre fonction monotone.

**Définition 12.** $T$ est fortement monotone de module $\beta > 0$ ($\beta$-fortement monotone) si

$$\langle z - z', x - x' \rangle \geq \beta \|x - x'\|^2 \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}, \forall z \in T(x), \forall z' \in T(x').$$

**Définition 13.** $T : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est

- fermé en $x \in \mathcal{C}$ si $x^k \to x, w^k \to w$ et $w^k \in T(x^k)\ \forall k$, alors $w \in T(x)$.
- fermé dans $\mathcal{C}$ s'il est fermé en tout point de $\mathcal{C}$.
- semi-continu supérieurement en $x \in \mathcal{C}$ si, pour tout voisinage $G$ de $F(x)$, il existe un voisinage $U$ de $x$ tel que $F(u) \subset G\ \forall u \in \mathcal{C} \cap U$.
- semi-continu supérieurement dans $\mathcal{C}$ s'il est semi-continu supérieurement en tout point $x$ de $\mathcal{C}$.

**Définition 14.** $T$ est Lipschitzien dans $\mathcal{C}$ de constante $L$ ($L$-Lipschitzien) si

$$\rho(T(x), T(x')) \leq L \|x - x'\| \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}$$

où $\rho$ est la distance de Hausdorff, i.e. soit $A, B$ deux ensembles

$$\rho(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

où

$$d(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|$$
$$d(B, A) := \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|.$$

Si $T$ est Lipschitzien de constante $L < 1$, alors $T$ est contractif dans $\mathcal{C}$.
Si $L = 1$, alors $T$ est nonexpansif.

## 4.3 Le principe de contraction de Banach

Dans cette section, nous montrerons comment appliquer le principe de contraction de Banach couplé au principe du point fixe pour résoudre l'inégalité variationnelle (VI), où la fonction de coût est fortement monotone dans $\mathcal{C}$.

Nous supposons que $\mathcal{C} \subseteq domF$.

Pour tout $x \in \mathcal{C}$ et $w \in F(x)$, nous définissons la fonction

$$g(x, w) := \min_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \langle w, y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2 \right\} \tag{4.1}$$

où $\alpha > 0$.

Soit $h(x, w)$ l'unique solution de problème convexe avec une fonction objectif quadratique et fortement convexe.

Nous définissons la fonction multivoque $H$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ par

$$H(x) := \{h(x, w) | w \in F(x)\}.$$

Notons que quand $F$ est univoque, $H$ est aussi univoque.

**Lemme 4.** *$x^*$ est solution de (VI) si et seulement si $x^* \in H(x^*)$.*

*Démonstration.* $\boxed{\Rightarrow \text{ Supposons que } x^* \text{ soit solution de (VI).}}$

Alors, il existe $w^* \in F(x^*)$ tel que

$$\langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Soit $h(x^*, w^*)$ l'unique solution du problème (4.1) avec $x = x^*, w = w^*$.

Remplaçons, dans l'inégalité du dessus, $x$ par $h(x^*, w^*)$, nous obtenons

$$\langle w^*, h(x^*, w^*) - x^* \rangle \geq 0. \tag{4.2}$$

Puisque $h(x^*, w^*)$ est la solution de (4.1), nous avons

$$\langle w^* + \alpha(h(x^*, w^*) - x^*), x - h(x^*, w^*) \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{C}$$

avec $x = x^*$, nous avons

$$\langle w^* + \alpha(h(x^*, w^*) - x^*), x^* - h(x^*, w^*)\rangle \geq 0. \tag{4.3}$$

Additionnons cette inégalité avec (4.2), nous obtenons

$$\langle \alpha(h(x^*, w^*) - x^*), x^* - h(x^*, w^*)\rangle \geq 0.$$

D'où $h(x^*, w^*) = x^*$, ce qui implique $x^* \in H(x^*)$.

$\boxed{\Leftarrow \text{ Supposons que } x^* \in H(x^*).}$

Alors, il existe $w^* \in F(x^*)$ tel que $x^* = h(x^*, w^*)$.

Notons que, pour tout $x \in \mathcal{C}, w \in F(x)$, puisque $h(x, w)$ est la solution de (4.1), nous avons

$$\langle w + \alpha(h(x, w) - x), y - h(x, w)\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{C}.$$

Remplaçons-y $x$ par $x^*$ et $w$ par $w^*$, nous avons donc, car $x^* = h(x^*, w^*)$,

$$\langle w^*, y - x^*\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{C}$$

ce qui signifie que $x^*$ est solution de (VI).

□

**Lemme 5.** *Supposons que $F$ est $\beta$-fortement monotone dans $\mathcal{C}$. Si $x, x' \in \mathcal{C}, w \in F(x), w' \in F(x')$, alors*

$$\|h(x, w) - h(x', w')\|^2 \leq \|x - x'\|^2 - \tfrac{2\beta}{\alpha}\|x - x'\|^2 + \tfrac{1}{\alpha^2}\|w - w'\|^2.$$

*Démonstration.* Le problème (4.1) peut se réécrire comme

$$\min_{y \in \mathcal{H}} \left\{ \langle w, y - x\rangle + \tfrac{\alpha}{2}\|y - x\|^2 + \delta_C(y) \right\}$$

où $\delta_C(.)$ est la fonction indicatrice de $\mathcal{C}$, i.e.

$$\delta_C(y) = \begin{cases} 0 & y \in \mathcal{C} \\ \infty & y \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

Notons que le sous-différentiel de la fonction indicatrice dans $\mathcal{C}$ est le cône normal de $\mathcal{C}$. En effet,

$$\begin{aligned} x^* \in \partial\delta_C(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall y \in \mathrm{I\!R}^n \quad \delta_C(y) \geq \delta_C(x) + \langle x^*, y - x\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \forall y \in \mathcal{C} \quad 0 \geq 0 + \langle x^*, y - x\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \forall y \in \mathcal{C} \quad \langle x^*, y - x\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent au cône normal !

Puisque $h(x, w)$ est la solution du problème convexe sans contrainte, nous avons

$$0 \in \alpha(h(x, w) - x) + w + N_C(h(x, w))$$

ce qui implique qu'il existe $z \in N_C(h(x, w))$ satisfaisant

$$z = -\alpha(h(x, w) - x) - w.$$

Similairement, $\forall x' \in \mathcal{C}, w' \in F(x')$, $\exists z' \in N_C(h(x', w'))$ tel que

$$z' = -\alpha(h(x', w') - x') - w'.$$

Puisque le cône normal $N_C$ est monotone, nous avons

$$\langle z - z', h(x, w) - h(x', w')\rangle \geq 0.$$

D'où, il suit que

$$\left\langle x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(w - w') - (h(x, w) - h(x', w')), h(x, w) - h(x', w')\right\rangle \geq 0$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \|h(x, w) - h(x', w')\|^2 \quad &\leq \left\langle x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(w - w'), h(x, w) - h(x', w')\right\rangle \\ &\leq \left\|x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(w - w')\right\| \|h(x, w) - h(x', w')\| . \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|h(x, w) - h(x', w')\|^2 \quad &\leq \left\|x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(w - w')\right\|^2 \\ &= \|x - x'\|^2 - \tfrac{2}{\alpha}\langle x - x', w - w'\rangle + \tfrac{1}{\alpha^2}\|w - w'\|^2 . \end{aligned}$$

Puisque $F$ est $\beta$-fortement monotone dans $\mathcal{C}$

$$\langle x - x', w - w' \rangle \geq \beta \|x - x'\|^2 \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}.$$

Donc, nous obtenons pour finir

$$\|h(x,w) - h(x',w')\|^2 \leq \|x - x'\|^2 - \tfrac{2\beta}{\alpha} \|x - x'\|^2 + \tfrac{1}{\alpha^2} \|w - w'\|^2$$

$\forall x, x' \in \mathcal{C}, \forall w \in F(x), \forall w' \in F(x')$.

□

**Corollaire 5.** *Si $F$ est $\beta$-fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$, alors*

$$\|h(x,w) - h(x',w')\| \leq \delta \|x - x'\| \qquad \forall x, x' \in \mathcal{C}, \forall w \in F(x), \exists w' \in F(x').$$

*où* $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$

*Notons que si $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, alors $0 < \delta < 1$.*

**Lemme 6.** *Supposons que $F$ est fermée, à valeurs convexes et $L$-Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$. Soit $x, x' \in \mathcal{C}, w \in F(x)$ et soit $w'$ la projection de $w$ dans $F(x')$. Alors,*

$$\|w - w'\| \leq L \|x - x'\|.$$

*Démonstration.* Puisque $F$ est fermée et à valeurs convexes, par la définition de la distance de Hausdorff, nous avons

$$\begin{aligned}
\rho(F(x), F(x')) &= \max\left\{d(F(x), F(x')), d(F(x'), F(x))\right\} \\
&\geq d(F(x), F(x')) \\
&= \max_{u \in F(x)} \max_{v \in F(x')} \|u - v\| \\
&\geq \max_{v \in F(x')} \|w - v\| \\
&= \|w - w'\|
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité a lieu car $w'$ est la projection de $w$ dans $F(x')$.

Puisque $F$ est $L$-Lipschitzienne, il suit que

$$\|w - w'\| \leq \rho(F(x), F(x')) \leq L \|x - x'\|.$$

□

Soit $\epsilon \geq 0$.

**Définition 15.** Nous dirons qu'un point $x^*$ est une $\epsilon$-solution de (VI) s'il existe $x \in H(x^*)$ tel que $\|x^* - x\| \leq \epsilon$.

L'algorithme suivant résoud (VI) quand $F$ est fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $C$.

$\boxed{\text{ALGORITHME 1}}$

Choisir une tolérance $\epsilon \geq 0$ et $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.

Choisir $x^0 \in C, w^0 \in F(x^0)$.

**Itération k**$(k = 0, 1, 2, \cdots)$

Résoudre le problème fortement convexe

$$P(x^k) : \min_{x \in C} \left\{ \frac{\alpha}{2} \left\| x - x^k \right\|^2 + \left\langle w^k, x - x^k \right\rangle \right\}$$

pour obtenir sa solution unique $x^{k+1}$.

**a)** Si $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| \leq \epsilon$, alors l'algorithme se termine : $x^k$ est une $\epsilon$-solution de (VIP).

**b)** Sinon, si $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| > \epsilon$, alors choisir $w^{k+1} \in F(x^{k+1})$ tel que $\left\| w^{j+1} - w^j \right\| \leq L \left\| x^{j+1} - x^j \right\|$, et retourner à l'itération $k$ avec $k := k + 1$.

**Théorème 3.** *Si l'algorithme se termine à l'itération $x^k$, alors $x^k$ est une $\epsilon$-solution de (VI). Si l'algorithme ne se termine pas, alors la suite de points $x^k$ converge fortement vers la solution $x^*$ de (VI).*
*De plus,*

$$\left\| x^k - x^* \right\| \leq \frac{\delta^k}{1-\delta} \left\| x^1 - x^0 \right\| \qquad \forall k.$$

*Si $F$ est semi-continue supérieurement dans $C$, alors la suite $\left\{ w^k \right\}$ a un point limite $w^* \in C$ tel que $w^* \in F(x^*)$.*

*Démonstration.* Si l'algorithme se termine, i.e., si $\left\|x^{k+1}-x^k\right\| \leq \epsilon$, alors $x^k$ est une $\epsilon$-solution de (VI) car $x^{k+1} \in H(x^k)$.

Si l'algorithme ne se termine pas, alors la suite $\left\{x^k\right\}$ converge fortement vers une solution de (VI). Observons que, pour tout $k$, $w^k \in F(x^k)$ et $x^{k+1} = h(x^k, w^k)$.
D'où, nous obtenons

$$\left\|x^{k+1}-x^k\right\| \leq \delta \left\|x^k - x^{k-1}\right\| \qquad \forall k \geq 1.$$

Puisque $0 < \delta < 1$, il suit que la suite $\left\{x^k\right\}$ satisfait le principe de contraction de Banach et le principe du point fixe. D'où, la suite converge fortement vers un $x^* \in \mathbb{R}^n$. De plus, nous avons

$$\left\|x^{k+1}-x^*\right\| \leq \tfrac{\delta^{k+1}}{1-\delta} \left\|x^1 - x^0\right\|.$$

Puisque $w^k \in F(x^k)$ $\forall k$, la suite $\left\{w^k\right\}$ est bornée, parce que $F$ est semi-continue supérieurement. D'où, sa sous-suite $\left\{w^{k_q}\right\}_q$ converge faiblement vers un point $w^*$. Donc, par

$$w^{k_q} \rightharpoonup w^*, \;\; x^{k_q} \to x^*, \;\; w^{k_q} \in F(x^{k_q}) \;\forall q$$

il suit que $w^* \in F(x^*)$, puisque $F$ est fermée.

D'autre part, puisque

$$x^{k_q+1} = \arg\min_{x \in C} \left\{ \tfrac{\alpha}{2} \left\|x - x^{k_q}\right\|^2 + \left\langle w^k, x - x^{k_q}\right\rangle \right\}$$

nous avons

$$\tfrac{\alpha}{2} \left\|x^{k_q+1} - x^{k_q}\right\|^2 + \left\langle w^{k_q+1}, x^{k_q+1} - x^{k_q}\right\rangle \leq \tfrac{\alpha}{2} \left\|x - x^{k_q}\right\|^2 + \left\langle w^{k_q}, x - x^{k_q}\right\rangle$$

pour tout $x \in \mathcal{C}$.
Faisons tendre $q$ vers l'infini, et nous obtenons

$$0 = \tfrac{\alpha}{2} \left\|x^* - x^*\right\|^2 + \langle w^*, x^* - x^*\rangle \leq \tfrac{\alpha}{2} \left\|x - x^*\right\|^2 + \langle w^*, x - x^*\rangle$$

ce qui veut dire que $x^* \in H(x^*)$. Donc, $x^*$ est solution de (VI).

$\square$

## 4.4 Application à la méthode du point proximal

Dans cette section, nous appliquerons l'algorithme 1 à l'algorithme du point proximal pour résoudre l'inégalité variationnelle (VI), où la fonction de coût est monotone et plus nécessairement fortement monotone.

Nous remarquons que le désavantage de l'algorithme 1 est qu'il requiert la connaissance à l'avance de la borne supérieure pour la constante de Lipschitz. Heureusement ce désavantage peut être évité quand nous appliquons l'algorithme 1 à l'algorithme du point proximal, puisque chaque sous-problème apparaissant dans l'algorithme du point proximal est une inégalité variationnelle fortement monotone où la constante de Lipschitz est égale à 1.

L'algorithme du point proximal est une technique puissante pour résoudre l'inclusion $0 \in T(x)$, où $T$ est un opérateur maximal monotone. Cette algorithme est basé sur le fait que, si $T$ est maximal monotone, alors, pour tout $c > 0$, l'opérateur proximal $P := (I + cT)^{-1}$ est partout défini, univoque et nonexpansif. Pour (VI), quand $F$ est monotone dans $\mathcal{C}$, $T$ est défini par

$$T(x) := \begin{cases} F(x) + N_{\mathcal{C}}(x) & \text{si } x \in \mathcal{C} \\ \emptyset & \text{si } x \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

où $N_{\mathcal{C}}(x)$ est le cône normal de $\mathcal{C}$ en $x$.

L'algorithme du point proximal peut être décrit brièvement comme ceci.
Choisir $u^0 \in \mathcal{C}$ et une suite de nombres positifs $\{c_k\}$ tel que $c_k > c > 0$ pour tout $k$.
A chaque itération $k = 0, 1, \cdots$, soit $u^k \in \mathcal{C}$, $c_k > 0$ et l'itéré suivant est défini par

$$u^{k+1} = (I + c_k T)^{-1}(u^k).$$

Clairement, si $u^{k+1} = u^k$, alors $u^k$ résoud l'inclusion $0 \in T(x)$.
Sinon, si l'algorithme ne se termine pas, alors la suite $\{u_k\}$ générée par cet algorithme est bornée et converge faiblement vers une solution (si le problème en admet une).

Notons que, puisque

$$u^{k+1} = (I + c_k T)^{-1}(u^k),$$

nous pouvons le réécrire comme

$$u^k \in (I + c_k T)(u^{k+1}).$$

Pour (VI), remplaçons $T(u^{k+1})$ par $F(u^{k+1}) + N_C(u^{k+1})$ pour obtenir

$$\left[u^k - u^{k+1} - c_k F(u^{k+1})\right] \cap N_C(u^{k+1}) \neq \emptyset,$$

ce qui signifie qu'il existe $v^{k+1} \in F(u^{k+1})$ vérifiant

$$\left\langle u^{k+1} + c_k v^{k+1} - u^k, u - u^{k+1} \right\rangle \geq 0 \qquad \forall u \in \mathcal{C}.$$

Soit

$$F_k(u) := u + c_k F(u) - u^k.$$

Alors, nous pouvons réécrire

$$(VI_k) \qquad \left\langle t^{k+1}, u - u^{k+1} \right\rangle \geq 0 \qquad \forall u \in \mathcal{C}.$$

avec $t^{k+1} \in F_k(u^{k+1})$.

D'où, $u^{k+1}$ est une solution de (VI) avec comme fonction de coût $F_k$. Clairement, si $F$ est monotone, alors $F_k$ est fortement monotone de module $\beta = 1$ ; si $F$ est $L$-Lipschitzienne, alors $F_k$ est $L_k$-Lipschitzienne de constante $L_k = 1 + c_k L$.

Puisque chaque sous-problème $(VI_k)$ apparaissant dans l'algorithme du point proximal est une inégalité variationnelle fortement monotone de fonction de coût $F_k(u) := u + c_k F(u) - u^k$, nous pouvons lui appliquer l'algorithme 1. C'est-à-dire, pour chaque $(VI_k)$, nous considérons, pour tout $u \in \mathcal{C}$ et $v^k \in F_k(u)$, la fonction

$$g_k(u, v^k) := -\min_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \left\langle v^k, y - u \right\rangle + \frac{\alpha_k}{2} \|y - u\|^2 \right\} \tag{4.4}$$

où $\alpha_k > 0$.

Puisque $\mathcal{C}$ est fermé et convexe et puisque la fonction objectif est fortement convexe, le problème mathématique définissant $g_k(u, v^k)$ possède une solution unique pour tout $u$ dans le domaine de $F_k$ qui est égal au domaine de $F$.

Soit $h_k(u, v^k)$ l'unique solution du problème (4.4).
Comme précédemment, soit $H_k : \mathcal{C} \to 2^{\mathcal{C}}$ défini par

$$H_k(u) := \left\{h_k(u, v^k) | v^k \in F_k(u)\right\}.$$

L'unique solution de $(VI_k)$ peut être calculée en trouvant l'unique point fixe de $H_k$ en utilisant l'algorithme 1. En pratique, nous résolverons l'approximation de $(VI_k)$. C'est-à-dire, nous choisirons d'abord une suite de nombres positifs $\{\epsilon_k\}$ tel que $\epsilon \searrow 0$ quand $k \to \infty$ et $\sum_k (\epsilon_k)^2 < +\infty$. Alors, au lieu de calculer la solution exacte $u^{k+1}$ du sous-problème $(VI_k)$, nous calculerons son approximation $\bar{u}^{k,j+1}$ tel que

$$\left\|\bar{u}^{k,j+1} - u^{k+1}\right\| \leq \epsilon_k.$$

*Remarque* 7. Dans l'algorithme 1 appliqué à $(VI_k)$, le paramètre de régulation $\alpha_k$ doit satisfaire

$$\alpha_k > \tfrac{L_k^2}{2} = \tfrac{(1+c_k L)^2}{2}.$$

Pour garantir la convergence de l'algorithme du point proximal, la suite $\{c_k\}$ doit être bornée supérieurement par 0, ce qui signifie $c_k > c > 0$ pour tout $k$. Puisque $c$ est n'importe quel nombre positif, nous pouvons choisir $c_k > 0$ assez petit de telle façon que

$$L_k = \tfrac{(1+c_k L)}{2} < \sqrt{2}.$$

D'où, nous pouvons prendre $\alpha_k \geq 1$ pour tout $k$.

Maintenant, nous allons décrire l'algorithme capable de résoudre les inégalités variationnelles multivoques et monotones.

$\boxed{\text{ALGORITHME 1}}$

Choisir une suite $\{\epsilon_k\}$ de nombres positifs tel que

$$\epsilon_k \searrow 0 \quad \text{et} \quad \textstyle\sum_k \epsilon_k < +\infty.$$

a) Si nous pouvons trouver la constante de Lipschitz de $F$, nous choisirons une suite de nombres positifs $\{c_k\}$ tel que
$$\tfrac{1+c_k L}{2} < 1 \qquad \forall k.$$

b) Si nous ne pouvons pas trouver la constante de Lipschitz, nous choisirons $\{c_k\}$ suffisamment petit et bornée supérieurement par 0.

Prendre une tolérance $\epsilon \geq 0$ et choisir $x^0 \in \mathcal{C}, w^0 \in F(x^0)$.

**Itération k** Boucle extérieure ($k = 0, 1, 2, \cdots$)

**Pas 0** Prendre $\alpha_k \geq 1$. Poser $u^{k,0} := x^k$ et choisir $w^{k,0} \in F_k(u^{k,0})$.
Poser $j := 0$.

**Pas 1** Boucle intérieure. Résoudre le problème quadratique fortement convexe

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha_k}{2} \left\| u - u^{k,j} \right\|^2 + \left\langle w^{k,j}, u - u^{k,j} \right\rangle \right\} \tag{4.5}$$

pour obtenir sa solution unique $u^{k,j+1}$.

***Cas 1*** Fin de la boucle intérieure.

**a)** Si $\frac{\delta_k^{j+1}}{1-\delta_k} \left\| u^{k,1} - u^{k,0} \right\| \leq \epsilon_k$, alors poser $x^{k+1} := u^{k,j+1}$, $w^{k+1} \in F(x^{k+1})$.

**b)** Si $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| + \epsilon_k \leq \epsilon$, alors l'algorithme se termine : $x^{k+1}$ est une $\epsilon$-solution de (VI).

**c)** Si $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| + \epsilon_k > \epsilon$, alors $k := k + 1$ et retourner à l'itération $k$.

***Cas 2***

Si $\frac{\delta_k^{j+1}}{1-\delta_k} \left\| u^{k,1} - u^{k,0} \right\| > \epsilon_k$, alors prendre

$$w^{k,j+1} \in F_k(u^{k,j+1}) \text{ tel que } \left\| w^{k,j+1} - w^{k,j} \right\| \leq L_k \left\| u^{k,j+1} - u^{k,j} \right\|.$$

Poser $j := j + 1$ et retourner au pas 1.

*Remarque* 8. Le principal sous-problème dans cette algorithme est le problème (4.5), qui est un problème quadratique fortement convexe. Celui-ci peut se réécrire comme

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \left\{ \left\| u - (u^{k,j} - \frac{1}{\alpha_k} w^{k,j}) \right\|^2 \right\}$$

ce qui est équivalent à trouver la projection du point $u^{k,j} - \frac{1}{\alpha_k} w^{k,j}$ dans $\mathcal{C}$.

*Remarque* 9. Supposons que la boucle intérieure se termine à l'itération $j$. Selon l'algorithme, nous avons que $x^{k+1} = u^{k,j+1}$, d'où,

$$x^{k+1} = Pr_C(u^{k,j} - \frac{1}{\alpha_k} w^{k,j})$$

avec $w^{k,j} \in F_k(u^{k,j})$.

Puisque $F_k(x) = x + c_k F(x) - x^k$, nous avons

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= Pr_C\left(u^{k,j} - \frac{1}{\alpha_k}\left\{u^{k,j} + c_k f^{k,j} - x^k\right\}\right) \\ &= Pr_C\left(u^{k,j}(1 - \frac{1}{\alpha_k}) - \frac{c_k}{\alpha_k} f^{k,j} + \frac{1}{\alpha_k} x^k\right) \end{aligned}$$

avec $f^{k,j} \in F(u^{k,j})$.

Quand $\alpha_k = 1$, nous avons

$$x^{k+1} = Pr_C(x^k - c_k f^{k,j}).$$

Suivant l'algorithme du point proximal, la suite de pas $c_k$ doit être bornée supérieurement par 0.

La convergence de l'algorithme est assurée par le théorème suivant.

**Théorème 4.** *(i) Si l'algorithme se termine à l'itération $k$, alors $x^{k+1}$ est une $\epsilon$-solution de (VI).*
*(ii) Si $F$ est semi-continue supérieurement avec des images compactes, alors la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme converge faiblement vers une solution $x^*$ de l'inégalité variationnelle (VI) et la suite $\{w^k\}$ a un point limite $w^*$ satisfaisant $w^* \in F(x^*)$.*

*Démonstration.* (i) Si l'algorithme se termine à l'itération $k$, alors $x^{k+1}$ est une $\epsilon$-solution de $(VI_k)$. Par l'algorithme du point proximal, il suit que

$$\left\|x^{k+1} - (I + c_k T_k)^{-1}(x^k)\right\| \leq \epsilon,$$

$$\text{où } T_k(x) := \begin{cases} F_k(x) + N_C(x) & \text{si } x \in domF \\ \emptyset & \text{si } x \notin domF. \end{cases}$$

Par le lemme (4), l'opérateur proximal $(I + c_k T_k)^{-1}$ et $H_k$ ont le même ensemble de points fixes, c'est-à-dire l'ensemble de solutions de (VI). D'où, $x^{k+1}$ est une $\epsilon$-solution de (VI).

(*ii*) Maintenant, supposons que $F$ est semi-continue supérieurement avec des images compactes. Pour chaque itération $k$, considérons la boucle intérieure.
Comme pour le théorème (3), nous avons

$$\left\|u^{k,j+1} - u^{k,j}\right\| \leq \delta_k^j \left\|u^{k,0} - u^{k,1}\right\|.$$

Puisque $\delta_k < 1$, il suit que

$$\left\|u^{k,j+1} - u^{k,j}\right\| \to 0 \qquad \text{quand } j \to \infty,$$

avec un taux $\mathcal{O}(\delta_k^j)$. Donc, la boucle intérieure doit se terminer après un nombre fini d'itération $j$, puisque $\epsilon_k > 0$.

D'autre part, par l'algorithme, $x^{k+1}$ est une $\epsilon_k$-solution du problème $(VI_k)$. Puisque

$$\epsilon_k > 0 \text{ et } \textstyle\sum_k \epsilon_k < +\infty.$$

par l'algorithme du point proximal, la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers une solution $x^*$ de (VI). De plus, puisque la suite $\{x^k\} \subset \mathcal{C}$ est bornée et $F$ est semi-continue supérieurement dans $\mathcal{C}$, il suit que $\{w^k\}$ est bornée car $w^k \in F(x^k)$. Donc, sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que la suite $\{w^k\}$ converge faiblement vers un $w^*$. Puisque $F$ est fermée en $x^*$, nous avons que $w^* \in F(x^*)$.

□

*Remarque* 10. Nous pouvons utiliser ce théorème, au lieu de prendre l'algorithme vu à la section 3, pour résoudre les inégalités variationnelles fortement monotones, en particulier quand la constante de Lipschitz est difficile à évaluer.

# Chapitre 5

# Les inégalités variationnelles multivoques mixtes

## 5.1 Introduction

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$.
Soit $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une fonction multivoque.
Nous supposerons que $\mathcal{C} \subseteq domF$ et que $F(x)$ est fermée et convexe pour tout $x \in \mathcal{C}$.
Soit aussi $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et sous-différentiable.

Considérons l'**inégalité variationnelle multivoque mixte** :

$$(\mathrm{VIP}) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \text{ et } w^* \in F(x^*) \text{ tel que} \\ \langle w^*, x - x^* \rangle + \varphi(x) - \varphi(x^*) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{C}. \end{array} \right.$$

Dans cette section, l'inégalité variationnelle comprend un terme en plus, à savoir, une fonction $\varphi$ convexe et sous-différentiable.

Nous allons résoudre les inégalités variationnelles multivoques, comprenant des fonctions fortement monotones, co-coercives et la distance de Hausdorff, grâce à l'algorithme du point proximal. C'est-à-dire, nous montrerons qu'une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un point soit une solution du problème comprenant des fonctions fortement monotones est qu'il soit point fixe d'une certaine fonction multivoque contractive.
Pour les inégalités variationnelles impliquant des fonctions multivoques et co-coercives, nous

montrerons que ses solutions peuvent être calculées en trouvant un point fixe d'une fonction multivoque nonexpansive. D'où le principe de contraction de Banach peut être appliqué pour résoudre les inégalités variationnelles de fonctions multivoques, fortement monotones et co-coercives.

Cette partie s'organise de cette façon. D'abord, nous donnerons quelques définitions et théorèmes pour que la fonction $H$ (définie ultérieurement) soit quasi-contractive. Ensuite, nous établirons les algorithmes basés sur le principe de contraction de Banach pour résoudre les inégalités variationnelles multivoques mixtes, et nous étudierons leur convergence.

## 5.2 Une approche au point fixe

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$.

Soit $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une fonction multivoque.

Nous supposerons que $\mathcal{C} \subseteq domF$ et que $F(x)$ est fermée et convexe pour tout $x \in \mathcal{C}$.

Soit aussi $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et sous-différentiable.

Considérons l'**inégalité variationnelle multivoque** :

$$\text{(VIP)} \begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \text{ et } w^* \in F(x^*) \text{ tel que} \\ \langle w^*, x - x^* \rangle + \varphi(x) - \varphi(x^*) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Pour chaque $x \in \mathcal{C}$ et $w \in F(x)$, nous noterons $h(x,w)$ l'unique solution du problème fortement convexe

$$\min_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{1}{2} \langle y - x, G(y - x) \rangle + \langle w, y - x \rangle + \varphi(y) \right\} \tag{5.1}$$

où $G$ est une matrice symétrique et définie positive.

Nous savons que $h(x,w)$ est solution de (VIP) si et seulement si $h(x,w)$ est solution de l'inégalité variationnelle

$$\langle w + G(h(x,w) - x) + z, y - h(x,w) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C} \tag{5.2}$$

où $z \in \partial\varphi(h(x,w))$.

Pour tout $x \in \mathcal{C}$, nous définissons $H : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}$ une fonction multivoque tel que

$$H(x) := \{h(x,w) | w \in F(x)\}.$$

Puisque $\mathcal{C} \subseteq domH$, nous avons que $\mathcal{C} \subseteq domH \subseteq domF$.

Le lemme suivant montre que $x^*$ est une solution de (VIP) si et seulement s'il est un point fixe de $H$.

**Lemme 7.** *$x^*$ est une solution de (VIP) si et seulement si $x^* \in H(x^*)$.*

*Démonstration.* $\boxed{\Rightarrow \text{Supposons que } x^* \text{ soit solution de (VIP).}}$

Ce qui veut dire qu'il existe $w^* \in F(x^*)$ tel que $(x^*, w^*)$ satisfait l'inégalité (VIP). Soit $h(x^*, w^*)$ l'unique solution du problème (5.1).

Remplaçons $x$ par $h(x^*, w^*)$ dans (VIP) pour obtenir

$$\langle w^*, h(x^*, w^*) - x^* \rangle + \varphi(h(x^*, w^*)) - \varphi(x^*) \geq 0. \tag{5.3}$$

De (5.2), il suit qu'il existe $z^* \in \partial\varphi(h(x^*, w^*))$ tel que

$$\langle w^* + G(h(x^*, w^*) - x^*) + z^*, y - h(x^*, w^*) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}.$$

Remplaçons-y $y$ par $x^* \in \mathcal{C}$

$$\langle w^* + G(h(x^*, w^*) - x^*) + z^*, x^* - h(x^*, w^*) \rangle \geq 0. \tag{5.4}$$

De (5.3) et (5.4), nous obtenons

$$\langle G(h(x^*, w^*) - x^*), x^* - h(x^*, w^*) \rangle + \langle z^*, x^* - h(x^*, w^*) \rangle + \varphi(h(x^*, w^*)) - \varphi(x^*) \geq 0 \tag{5.5}$$

où $z \in \partial\varphi(h(x, w))$.

Puisque $\varphi$ est convexe dans $\mathcal{C}$, et par la définition du sous-différentiel d'une fonction convexe, nous obtenons

$$\langle z^*, x^* - h(x^*, w^*) \rangle \leq \varphi(x^*) - \varphi(h(x^*, w^*)) \quad \forall z^* \in \partial\varphi(h(x^*, w^*)).$$

D'où

$$\langle z^*, x^* - h(x^*, w^*) \rangle - \varphi(x^*) + \varphi(h(x^*, w^*)) \leq 0 \quad \forall z^* \in \partial\varphi(h(x^*, w^*)). \tag{5.6}$$

De (5.5) et (5.6), il suit que

$$\langle G(h(x^*, w^*) - x^*), x^* - h(x^*, w^*) \rangle \geq 0.$$

Puisque $G$ est symétrique et définie positive, la dernière inégalité implique que $h(x^*, w^*) = x^*$.

$\boxed{\Leftarrow \text{Supposons que } x^* \in H(x^*).}$

Alors, il existe $w^* \in F(x^*)$ tel que $x^* = h(x^*, w^*)$.

Mais, pour tout $x \in \mathcal{C}$, $w \in F(x)$, nous avons toujours

$$\langle w + G(h(x,w) - x) + z, y - h(x,w)\rangle \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}$$

où $z \in \partial\varphi(h(x,w))$.

Remplaçons $x, w, z$ par $x^* = h(x^*, w^*), w^*, z^*$ respectivement, dans l'inégalité ci-dessus, pour obtenir

$$\langle w^* + z^*, y - x^*\rangle \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}$$

où $z^* \in \partial\varphi(x^*)$.

En utilisant la définition du sous-différentiel d'une fonction convexe, nous obtenons

$$\varphi(y) - \varphi(x^*) \geq \langle z^*, y - x^*\rangle \quad \forall y \in \mathcal{C}.$$

Des deux dernières inégalités, nous avons

$$\langle w^*, y - x^*\rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}$$

ce qui signifie que $x^*$ est solution du problème (VIP).

□

Maintenant, donnons-nous quelques définitions.

**Définition 16.** Soit $A, B$ deux ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. Soit $\rho(A, B)$ la distance de Hausdorff de $A$ et $B$ définie comme

$$\rho(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\},$$

où $d(A, B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a - b\|$
$d(B, A) := \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \|a - b\|$.

Et soit $diamA$ le diamètre de $A$ défini par

$$diamA := \sup_{x,y\in A}\{\|x - y\|\}.$$

**Définition 17.** Soit $\emptyset \neq \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{M} \subseteq domK$

- $K$ est fermé en $x$ si, quand $x^k \to x$, $y^k \in K(x^k)$, $y^k \to y$ quand $k \to +\infty$, alors $y \in K(x)$.
- $K$ est fermé dans $\mathcal{M}$ s'il est fermé en tout point de $\mathcal{M}$.

- $K$ est semi-continu supérieurement en $x$ si pour tout ensemble ouvert $G$ contenant $K(x)$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ tel que $F(U) \subset G$.
- $K$ est semi-continu supérieurement dans $\mathcal{M}$ s'il est semi-continu supérieurement en tout point de $\mathcal{M}$.

**Définition 18.** $K$ est $L$-Lipschitzien dans $\mathcal{M}$ si

$$\rho(K(x), K(y)) \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{M}.$$

$K$ est contractif si $L < 1$ et $K$ est nonexpansif si $L = 1$.

**Définition 19.** $K$ a une sélection $L$-Lipschitzienne dans $\mathcal{M}$ si pour tout $x, y \in \mathcal{M}$, il existe $w(x) \in K(x)$ et $w(y) \in K(y)$ tel que

$$\|w(x) - w(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

Si $0 < L < 1$, $K$ a une sélection contractive dans $\mathcal{M}$. Si $L = 1$, $K$ a une sélection nonexpansive dans $\mathcal{M}$.

Il est facile à voir qu'une fonction multivoque, Lipschitzienne, compacte et convexe a une sélection Lipschitzienne. C'est pourquoi dans cette section nous dirons qu'une fonction, possédant une sélection Lipschitzienne, est quasi-Lipschitzienne. Et une fonction, ayant une sélection contractive ou nonexpansive, est quasi-contractive ou quasi-nonexpansive.

**Définition 20.** $K$ est monotone dans $\mathcal{M}$ si

$$\langle w - w', x - x' \rangle \geq 0 \quad \forall x, x' \in \mathcal{M}, w \in K(x), w' \in K(x').$$

**Définition 21.** $K$ est $\beta$-fortement monotone dans $\mathcal{M}$ si

$$\langle w - w', x - x' \rangle \geq \beta \|x - x'\|^2 \quad \forall x, x' \in \mathcal{M}, w \in K(x), w' \in K(x').$$

**Définition 22.** $K$ est $\delta$-co-coercive dans $\mathcal{M}$ si

$$\langle w - w', x - x' \rangle \geq \delta \rho^2(K(x), K(x')) \quad \forall x, x' \in \mathcal{M}, w \in K(x), w' \in K(x')$$

où $\rho$ est la distance de Hausdorff.

Notons que, quand $G = \alpha I$, avec $\alpha > 0$ et $I$ la matrice identité, le problème (22) devient

$$\min_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2 + \langle w, y - x \rangle + \varphi(y) \right\}. \tag{5.7}$$

Dans ce qui suit, nous ferons référence à ce problème.

Le théorème suivant montre comment choisir le paramètre de régulation $\alpha$ pour que la fonction $H$ soit contractive dans $\mathcal{C}$.

**Théorème 5.** *Supposons que $F$ est $\beta$-fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $\mathcal{C}$ et que $F(x)$ est compacte pour tout $x \in \mathcal{C}$. Alors $H$ est quasi-contractive dans $\mathcal{C}$ de constante $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$ quand $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.*

*Démonstration.* Le problème (5.1) peut se réécrire comme

$$\min_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2 + \langle w, y - x \rangle + \varphi(y) + \delta_C(y) \right\}$$

où $\delta_C(y)$ est la fonction indicatrice de $\mathcal{C}$.

Soit $h(x, w)$ l'unique solution de ce problème sans contrainte. Alors nous avons

$$0 \in \alpha(h(x, w) - x) + w + N_C(h(x, w)) + \partial\varphi(h(x, w)).$$

D'où

$$h(x, w) = x - \frac{1}{\alpha} w - \frac{1}{\alpha} z_1 - \frac{1}{\alpha} z_2. \tag{5.8}$$

Et pour $x' \in \mathcal{C}$, $w' \in F(x')$, nous avons

$$h(x', w') = x' - \frac{1}{\alpha} w' - \frac{1}{\alpha} z_1' - \frac{1}{\alpha} z_2' \tag{5.9}$$

où $z_1' \in N_C(h(x', w'))$ et $z_2' \in \partial\varphi(h(x', w'))$.

Puisque $N_C$ est monotone, nous avons

$$\langle z_1 - z_1', h(x, w) - h(x', w') \rangle \geq 0. \tag{5.10}$$

Puisque (5.8) $\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} z_1 = -h(x, w) + x - \frac{1}{\alpha} w - \frac{1}{\alpha} z_2$

et que (5.9) $\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha}z_1' = h(x', w') - x' + \frac{1}{\alpha}w' + \frac{1}{\alpha}z_2'$,

nous avons que (5.10) est équivalent à

$$\left\langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') - \frac{1}{\alpha}(z_2 - z_2') - (h - h'), h - h' \right\rangle \geq 0$$

où $h = h(x, w)$ et $h' = h(x', w')$ par abus de notation.

$$\Leftrightarrow \left\langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') - \frac{1}{\alpha}(z_2 - z_2'), h - h' \right\rangle - \underbrace{\left\langle h - h', h - h' \right\rangle}_{\|h-h'\|^2} \geq 0$$

ce qui implique

$$\|h - h'\|^2 \leq \left\langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') - \frac{1}{\alpha}(z_2 - z_2'), h - h' \right\rangle$$

$$= \left\langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w'), h - h' \right\rangle - \frac{1}{\alpha}\left\langle z_2 - z_2', h - h' \right\rangle.$$

Puisque $\partial\varphi$ est monotone dans $\mathcal{C}$, nous avons

$$\langle h - h', z_2 - z_2' \rangle \geq 0 \quad \forall z_2 \in \partial\varphi(h), z_2' \in \partial\varphi(h').$$

D'où, il suit que

$$\begin{aligned} \|h - h'\|^2 &\leq \left\langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w'), h - h' \right\rangle \\ &\leq \left\| x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') \right\| \|h - h'\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|h - h'\|^2 &\leq \left\| x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') \right\|^2 \\ &= \|x - x'\|^2 - \frac{2}{\alpha}\underbrace{\left\langle x - x', w - w' \right\rangle}_{\geq \beta\|x-x'\|^2} + \frac{1}{\alpha^2}\|w - w'\|^2 \end{aligned}$$

car $F$ est fortement monotone.

Puisque $F$ est $L$-Lipschitzienne et à valeurs compactes dans $\mathcal{C}$, il existe $w(x) \in F(x), w(x') \in F(x')$ tel que

$$\|w(x) - w(x')\| \leq L\|x - x'\|.$$

Nous obtenons donc

$$\|h(x,w(x)) - h(x',w(x'))\|^2 \leq \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}\right) \|x - x'\|^2 .$$

Finallement, nous avons

$$\|h(x,w(x)) - h(x',w(x'))\| \leq \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}\, \|x - x'\| .$$

Soit $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$, alors

$$\|h(x,w(x)) - h(x',w(x'))\| \leq \delta \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C.$$

Si $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$ alors $\delta < 1$. Donc $H$ a une sélection contractive dans $C$ de constante $\delta$.

$\square$

*Remarque* 11. Si $\varphi$ est $\eta$-fortement convexe et sous-différentiable dans $C$, alors son sous-différentiel $\partial\varphi$ est $\eta$-fortement monotone dans $C$. Ce qui signifie que

$$\langle z - z', x - x'\rangle \geq \eta \|x - x'\|^2 \;\; \forall x, x' \in C, z \in \partial\varphi(x), z' \in \partial\varphi(x')$$

en effet,
$\varphi$ $\eta$-fortement convexe $\Leftrightarrow$

$$\forall x' \quad \varphi(x') \leq \varphi(x) + \langle z, x' - x\rangle + \eta \|x' - x\|^2$$

$$\forall y' \quad \varphi(y') \leq \varphi(y) + \langle z', y' - y\rangle + \eta \|y' - y\|^2$$

ceci est vrai pour tout $x'$ et pour tout $y'$, donc vrai pour $x' = y$ et $y' = x$, ce qui donne en les additionnant

$$0 \leq \langle z' - z, x - y\rangle + 2\eta \|x - y\|^2 \Leftrightarrow \langle z' - z, x - y\rangle \geq \eta' \|x - y\|^2 .$$

Dans le théorème suivant, la forte monotonicité de $F$ est remplacée par la forte monotonicité de $\partial\varphi$.

**Théorème 6.** *Supposons que $F$ est monotone et $L$-Lipschitzienne dans $C$, et que $F(x)$ est compacte, convexe pour tout $x \in C$. Supposons aussi que $\varphi$ est $\eta$-fortement convexe et sous-différentiable dans $C$ (i.e. $\partial\varphi$ $\eta$-fortement monotone). Alors $H$ est quasi-contractive dans $C$ de constante $\delta := \frac{\sqrt{L^2+\alpha^2}}{\alpha+\eta}$ quand $\alpha > \frac{L^2-\eta^2}{2\eta}$.*

*Démonstration.* En utilisant la même pocédure que dans le théorème (5), nous obtenons, en remplacant $h(x,w)$ par $h$ et $h(x',w')$ par $h'$,

$$\begin{aligned}\|h-h'\|^2 &\leq \left\langle x-x'-\tfrac{1}{\alpha}(w-w')-\tfrac{1}{\alpha}(z_2-z_2'), h-h'\right\rangle \\ &= \left\langle x-x'-\tfrac{1}{\alpha}(w-w'), h-h'\right\rangle - \tfrac{1}{\alpha}\left\langle z_2-z_2', h-h'\right\rangle\end{aligned}$$

pour tout $x, x' \in \mathcal{C}, w \in F(x), w' \in F(x')$, où $z_2 \in \partial\varphi(h), z_2' \in \partial\varphi(h')$.

Puisque $\partial\varphi$ est $\eta$-fortement monotone dans $\mathcal{C}$, nous avons

$$\left\langle z_2-z_2', h-h'\right\rangle \geq \eta\,\|h-h'\|^2$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{1}{\alpha}\left\langle z_2-z_2', h-h'\right\rangle \leq -\tfrac{\eta}{\alpha}\,\|h-h'\|^2.$$

D'où

$$\|h-h'\|^2 \leq \left\langle x-x'-\tfrac{1}{\alpha}(w-w'), h-h'\right\rangle - \tfrac{\eta}{\alpha}\,\|h-h'\|^2$$

$$\Leftrightarrow (1+\tfrac{\eta}{\alpha})\,\|h-h'\|^2 \leq \left\langle x-x'-\tfrac{1}{\alpha}(w-w'), h-h'\right\rangle$$

$$\Leftrightarrow (1+\tfrac{\eta}{\alpha})\,\|h-h'\|^2 \leq \left\|x-x'-\tfrac{1}{\alpha}(w-w')\right\|\,\|h-h'\|$$

$$\Leftrightarrow (1+\tfrac{\eta}{\alpha})\,\|h-h'\| \leq \left\|x-x'-\tfrac{1}{\alpha}(w-w')\right\|.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{\eta}{\alpha})^2\,\|h-h'\|^2 &\leq \left\|x-x'-\tfrac{1}{\alpha}(w-w')\right\|^2 \\ &= \|x-x'\|^2 - \tfrac{2}{\alpha}\left\langle x-x', w-w'\right\rangle + \tfrac{1}{\alpha^2}\,\|w-w'\|^2.\end{aligned}$$

Puisque $F$ est $L$-Lipschitzienne et à valeurs compactes dans $\mathcal{C}$, il existe $w(x) \in F(x), w(x') \in F(x')$ tel que

$$\|w(x)-w(x')\| \leq L\,\|x-x'\|\,.$$

Puisque $F$ est monotone

$$\langle w(x) - w(x'), x - x' \rangle \geq 0.$$

D'où

$$(1 + \tfrac{\eta}{\alpha})^2 \|h(x, w(x)) - h(x', w(x'))\|^2 \leq (1 + \tfrac{L^2}{\alpha^2}) \|x - x'\|^2 .$$

Ce qui veut dire que

$$\|h(x, w(x)) - h(x', w(x'))\| \leq \delta \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C$$

où $\delta := \frac{\sqrt{L^2+\alpha^2}}{\alpha+\eta}$.

car $\delta^2 := (1 + \frac{L^2}{\alpha^2})(1 + \frac{\eta}{\alpha})^{-2} = \frac{\alpha^2+L^2}{\alpha^2}(\frac{\alpha}{\alpha+\eta})^2$.

Si $\alpha > \frac{L^2-\eta^2}{2\eta}$ alors $\delta < 1$.

□

Le théorème suivant échange la forte monotonicité de $F$ par la co-coercivité.

**Théorème 7.** *Supposons que $F$ est $\gamma$-co-coercive dans $C$ et que $F(x)$ est compacte et convexe pour tout $x \in C$. Supposons aussi que $\alpha \geq \frac{1}{2\gamma}$. Alors $H$ est quasi-nonexpansive dans $C$.*

*Démonstration.* En utilisant la même pocédure que dans le théorème (5), nous obtenons

$$\left\|h(x, w) - h(x', w')\right\|^2 \leq \left\|x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w')\right\|^2 . \tag{5.11}$$

Puisque $F$ est $\gamma$-co-coercive dans $C$, il suit que

$$\gamma\rho^2(F(x), F(x')) \leq \langle x - x', w - w' \rangle \quad \forall x, x' \in C, w \in F(x), w' \in F(x')$$

d'où, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|x-x'-\tfrac{1}{\alpha}(w-w')\right\|^2 &= \|x-x'\|^2-\tfrac{2}{\alpha}\langle x-x',w-w'\rangle+\tfrac{1}{\alpha^2}\|w-w'\|^2\\
&\overset{*}{\leq} \|x-x'\|^2-\tfrac{2\gamma}{\alpha}\|w(x)-w(x')\|^2+\tfrac{1}{\alpha^2}\|w-w'\|^2\\
&\leq \|x-x'\|^2-(\tfrac{2\gamma}{\alpha}-\tfrac{1}{\alpha^2})\|w(x)-w(x')\|^2
\end{aligned}$$

où $w(x)\in F(x), w(x')\in F(x')$.

$*$ car $\langle x-x',w-w'\rangle \geq \gamma\rho^2(F(x),F(x')) = \gamma\|w(x)-w(x')\|^2$
en effet,
$\rho(F(x),F(x')) = \sup_{w(x)\in F(x)}\inf_{w(x')\in F(x')}\|w(x)-w(x')\|$.

Comme $F(x)$ est compacte et continue, alors le suprémum et l'infimum sont atteints, i.e. $\exists w(x), w(x')$ tel que

$$\sup_{w(x)\in F(x)}\inf_{w(x')\in F(x')}\|w(x)-w(x')\| = \|w(x)-w(x')\|.$$

Puisque $\alpha \geq \frac{1}{2\gamma}$, on obtient

$$\left\|x-x'-\tfrac{1}{\alpha}(w(x)-w(x'))\right\|^2 \leq \|x-x'\|^2 \quad \forall x,x'\in\mathcal{C}.$$

Pour finir, nous obtenons

$$\|h(x,w(x))-h(x',w(x'))\| \leq \|x-x'\| \quad \forall x,x'\in\mathcal{C}.$$

$\square$

## 5.3 Description des algorithmes

Les résultats dans les sections précédentes mènent à des algorithmes résolvant les inégalités variationnelles multivoques par le principe de contraction de Banach. Nous avons déjà vu comment choisir le paramètre de régulation, quand la fonction $F$ est fortement monotone ou quand $\varphi$ est fortement convexe, pour que $H$ soit quasi-contractive. Dans ce cas, par le principe de contraction de Banach, l'unique solution du problème (VIP) peut être approximée par

$$x^{k+1} \in H(x^k), \;\; k = 0, 1, \ldots$$

où $x^0$ est n'importe quel point de $\mathcal{C}$.

Suivant la définition de $H$, calculer $h(x^k, w^k)$ demande de résoudre un problème fortement convexe.
Dans ce qui suit, nous exprimerons une $\epsilon$-solution de (VIP) par $x$ un point tel que $\|x - x^*\| \leq \epsilon$ où $x^*$ est la solution exacte de (VIP).

L'algorithme peut être décrit en détail comme suit :

$\boxed{\text{ALGORITHME 1}}$

Choisir une tolérance $\epsilon \geq 0$.

Choisir $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, quand $F$ est $\beta$-fortement monotone.

Choisir $\alpha > \frac{L^2-\eta^2}{2\eta}$, quand $\varphi$ est $\eta$-fortement convexe.

où $L$ est la constante de Lipschitz de $F$.

Choisir $x^0 \in \mathcal{C}, w^0 \in F(x^0)$.

**Itération k**$(k = 0, 1, 2, \ldots)$

Résoudre le problème fortement convexe

$$P(x^k) : \min_{x \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} \left\| x - x^k \right\|^2 + \left\langle w^k, x - x^k \right\rangle + \varphi(x) \right\}$$

pour obtenir sa solution unique $x^{k+1}$.

Trouver $w^{k+1} := Pr_{F(x^{k+1})}(w^k)$ (la projection de $w^k$ dans $F(x^{k+1})$).

**a)** Si $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon(1-\delta)$, alors l'algorithme se termine : $x^k$ est une $\epsilon$-solution de (VIP).

**b)** Sinon, si $\|x^{k+1} - x^k\| > \epsilon(1-\delta)$, alors $k := k+1$ et retourner à l'itération $k$.

Par les théorèmes énoncés précédemment et par le principe de contraction de Banach, nous avons

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \tfrac{\delta^{k+1}}{1-\delta} \|x^0 - x^1\| \ \forall k$$

où $0 < \delta < 1$ est la constante quasi-contractive de $h$.

Nous savons que $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$ quand $F$ est $\beta$-fortement monotone et $\delta := \frac{\sqrt{L^2+\alpha^2}}{\alpha+\eta}$ quand $\varphi$ est $\eta$-fortement convexe.

La preuve du théorème de convergence nécessite un lemme au préalable.

**Lemme 8.** *Supposons que $C \subseteq I\!R^n$ est non vide, fermé, convexe et $F : I\!R^n \to 2^{I\!R^n}$ est quasi-nonexpansive dans $C$. Alors pour tout $x, x' \in C, w \in F(x), w' = Pr_{F(x')}(w)$, nous avons que $\|w - w'\| \leq \|x - x'\|$.*

*Démonstration.* Puisque $w \in F(x)$, par la définition de la projection et la distance de Hausdorff, nous avons

$$\begin{aligned}\|w - w'\| &= \inf_{v' \in F(x')} \|w - v'\| \\ &= \sup_{v \in F(x)} \inf_{v' \in F(x')} \|v - v'\| \\ &\leq \rho(F(x), F(x')) \\ &\leq \|x - x'\|.\end{aligned}$$

□

**Théorème 8.** *Supposons que $F$ est $\beta$-fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $C$ et que $F(x)$ est compacte pour tout $x \in C$. Alors la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme satisfait*

$$\|x^k - x^*\| \leq \tfrac{\delta^{k+1}}{1-\delta} \|x^0 - x^1\| \ \forall k$$

*où $x^*$ est la solution de (VIP).*

*Si, en plus, $F$ est fermée dans $C$, alors la suite $\{w^k\}$ converge vers $w^* \in F(x^*)$ tel que*

$$\left\|w^k - w^*\right\| \leq \tfrac{L\delta^k}{1-\delta}\left\|x^0 - x^1\right\| \ \forall k.$$

*Démonstration.* Soit $x^*$ solution de (VIP). Par le lemme (7),

$$x^* \in H(x^*) := \{h(x^*, w)|w \in F(x^*)\}.$$

Soit $w^* \in F(x^*)$ tel que $x^* = h(x^*, w^*) \in H(x^*)$. Puisque $w^{k+1} := Pr_{F(x^{k+1})}(w^k)$, nous avons

$$\left\|w^{k+1} - w^k\right\| \leq \rho(F(x^{k+1}, F(x^k)) \leq \left\|x^{k+1} - x^k\right\| \ \forall k.$$

Combiné avec $\|h(x, w(x)) - h(x', w(x'))\| \leq \delta \|x - x'\|$ (vu dans le théorème (5)), nous obtenons

$$\left\|h(x^{k+1}, w^{k+1}) - h(x^k, w^k)\right\| \leq \delta \left\|x^{k+1} - x^k\right\| \ \forall k.$$

Puisque $h(x^{k+1}, w^{k+1}) = x^{k+2}$, nous avons

$$\left\|x^{k+2} - x^{k+1}\right\| \leq \delta \left\|x^{k+1} - x^k\right\| \ \forall k$$

ce qui donne par le principe de contraction de Banach,

$$\left\|x^k - x^*\right\| \leq \tfrac{\delta^{k+1}}{1-\delta}\left\|x^0 - x^1\right\| \ \forall k.$$

Donc, $x^k \to x^*$ quand $k \to \infty$.

De plus, nous avons

$$\left\|x^{p+k} - x^k\right\| \leq \delta^k \tfrac{1-\delta^p}{1-\delta}\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \ \forall k, p.$$

Faisons tendre $p$ vers l'infini et nous avons

$$\left\|x^k - x^*\right\| \leq \tfrac{\delta^k}{1-\delta}\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \ \forall k.$$

Donc, si $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leq \epsilon(1-\delta)$, alors $\left\|x^k - x^*\right\| \leq \epsilon$.

De plus, puisque $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leq \epsilon(1-\delta) < \epsilon$ et $x^{k+1} \in C$, nous concluons que $x^k$ est une $\epsilon$-solution de (VIP).

L'autre partie de la preuve se montre comme suit.

$\boxed{\text{ALGORITHME 2}}$

Choisir une tolérance $\epsilon \geq 0$.

Choisir $\alpha > \frac{L_0^2}{2\beta}$, quand $F$ est $\beta$-fortement monotone.

Choisir $\alpha > \frac{L_0^2 - \eta^2}{2\eta}$, quand $\varphi$ est $\eta$-fortement convexe.

où $L_0 \geq \frac{L_\tau + \mu}{\epsilon(1-\delta)}$,

et $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L_0^2}{\alpha^2}}$ quand $F$ est $\beta$-fortement monotone

et $\delta := \frac{\sqrt{L_0^2 + \alpha^2}}{\alpha + \eta}$ quand $\varphi$ est $\eta$-fortement convexe.

Choisir $x^0 \in C, w^0 \in F(x^0)$.

**Itération** $\mathbf{k}(k = 0, 1, 2, \dots)$

Résoudre le problème fortement convexe

$$P(x^k) : \min_{x \in C} \left\{ \frac{\alpha}{2} \left\| x - x^k \right\|^2 + \langle w^k, x - x^k \rangle + \varphi(x) \right\}$$

pour obtenir sa solution unique $x^{k+1}$.

Choisir $w^{k+1} \in F(x^{k+1})$.

**a)** Si $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| \leq \epsilon(1 - \delta)$, alors l'algorithme se termine : $x^k$ est une $\epsilon$-solution de (VIP).

**b)** Sinon, si $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| > \epsilon(1 - \delta)$, alors $k := k + 1$ et retourner à l'itération $k$.

**Théorème 9.** *Supposons que $F$ est $\beta$-fortement monotone et $L$-Lipschitzienne dans $C$ et que $F(x)$ est compacte pour tout $x \in C$. Alors la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme satisfait*

$$\left\| x^k - x^* \right\| \leq \frac{\delta^{k+1}}{1-\delta} \left\| x^0 - x^1 \right\| \ \forall k$$

*où $x^*$ est la solution de (VIP).*

*Si, en plus, $C$ est compact et $F$ semi-continue supérieurement dans $C$, alors la suite $\{w^k\}$ converge vers $w^* \in F(x^*)$ tel que*

$$\|w^k - w^*\| \leq \frac{L_0\delta^k}{1-\delta} \|x^0 - x^1\| \ \forall k.$$

*Démonstration.* Par la même procédure que dans le théorème précédent, nous avons que, si $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon(1-\delta)$, alors $x^k$ est une $\epsilon$-solution.

Pour tout $w^{k+1} \in F(x^{k+1})$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|w^{k+1} - w^k\| &\leq \|w^k - \bar{w}\| + \|\bar{w} - w^{k+1}\| \qquad \text{où } \bar{w} \in F(x^{k+1}) \\
&= \inf_{\bar{w}\in F(x^{k+1})} \|w^k - \bar{w}\| + \sup_{\bar{w}, w^{k+1}\in F(x^{k+1})} \|\bar{w} - w^{k+1}\| \\
&= d(w^k, F(x^{k+1})) + diam F(x^{k+1}) \\
&\leq L \|x^{k+1} - x^k\| + \mu \\
&\leq L\tau + \mu \\
&\leq L_0\epsilon(1-\delta) \\
&< L_0 \|x^{k+1} - x^k\|
\end{aligned}$$

ce qui implique avec $L_0 \geq \frac{L_\tau + \mu}{\epsilon(1-\delta)}$

$$\|w^{k+1} - w^k\| < L_0 \|x^{k+1} - x^k\| \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

□

Revenons maintenant au cas où $F$ est co-coercive. Notons que dans ce cas, (VIP) n'admet pas nécessairement une solution unique. Nous avons déjà vu comment une solution de (VIP) peut être obtenue en calculant un point fixe de $H$. Comme $H$ a une sélection nonexpansive, son point fixe peut être calculé en utilisant le théorème suivant.

**Théorème 10.** *Soit $C \subseteq I\!R^n$ non vide, fermé, convexe et soit $S : C \to 2^C$ ayant une sélection fermée, nonexpansive et à valeurs bornées dans $C$. Pour $0 < \lambda < 1$ définissons*

$$S_\lambda := (1-\lambda)I + \lambda S.$$

*Alors les suites $\{x^k\}, \{y^k\}$ définies par $x^{k+1} \in S_\lambda(x^k)$, i.e.*

$$x^{k+1} := (1-\lambda)x^k + \lambda y^k$$

*avec* $y^k \in S(x^k)$, *satisfont*

$$\left\|y^{k+1} - y^k\right\| \leq \left\|x^{k+1} - x^k\right\| \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\left\|x^k - y^k\right\| \to 0 \quad \textit{quand } k \to +\infty$$

*et tout point d'accumulation de la suite* $\{x^k\}$ *est un point fixe de* $S$.

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant, que nous admettrons :

**Lemme 9.** *Sous les hypothèses du théorème, pour tout* $i, m = 0, 1, \ldots,$ *nous avons*

$$\left\|y^{i+m} - x^i\right\| \geq (1-\lambda)^{-m}\left\{ \left\|y^{i+m} - x^{i+m}\right\| - \left\|y^i - x^i\right\| \right\} + (1 + \lambda m)\left\|y^i - x^i\right\|. \tag{5.12}$$

*Démonstration.* Nous procéderons par l'absurde.
Soit $d := \sup_{x \in C} \sup_{x^i, y^i \in S(x)} \left\|y^i - x^i\right\| = \sup_{x \in C}\{diam S(x)\}$.
Supposons que $\lim_{m \to \infty} \|y^m - x^m\| = r > 0$.
Soit $m \geq \frac{d}{r\lambda}$ et $\epsilon$ un nombre positif suffisamment petit tel que $\epsilon(1-\lambda)^{-m} < r$.
Puisque $\{\|y^m - x^m\|\}$ est décroissante, il existe un entier $i$ tel que

$$0 \leq \left\|y^i - x^i\right\| - \left\|y^{m+i} - x^{m+i}\right\| \leq \epsilon.$$

D'où, en utilisant le lemme, nous arrivons à une contradiction

$$\begin{aligned}
d + r &\leq (1 + m\lambda) r \qquad \text{car } d \leq m r \lambda \\
&\leq (1 + m\lambda)\left\|y^i - x^i\right\| \\
&\leq \left\|y^{m+i} - x^i\right\| + (1-\lambda)^{-m}\left\{ \left\|y^i - x^i\right\| - \left\|y^{m+i} - x^{m+i}\right\| \right\} \\
&\leq \left\|y^{m+i} - x^i\right\| + (1-\lambda)^{-m}\epsilon \\
&< d + r.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $r = 0$ et $\lim_{m \to \infty} \|y^m - x^m\| = 0$.
Puisque $S$ est une fonction à valeurs bornées dans $C$ et que $S$ est fermée, nous avons que tout point d'accumulation de la suite $\{x^m\}$ est un point fixe de $S$.

□

Maintenant appliquons ce théorème à $H$ pour résoudre (VIP) avec $F$ co-coercive en trouvant un point fixe de $H$.

$\boxed{\text{ALGORITHME 3}}$

**Pas 0** Choisir une tolérance $\epsilon \geq 0$ et $\lambda \in (0,1), \alpha \geq \frac{1}{2\gamma}$.
Choisir $x^0 \in \mathcal{C}, w^0 \in F(x^0)$. Poser $k = 0$.

**Pas 1** Résoudre le problème fortement convexe

$$P(x^k) : \min_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} \left\| y - x^k \right\|^2 + \left\langle w^k, y - x^k \right\rangle + \varphi(y) \right\}$$

pour obtenir sa solution unique $y^k$.

**a)** Si $\left\| y^k - x^k \right\| \leq \epsilon$, alors l'algorithme se termine : $x^k$ est une $\epsilon$-solution de (VIP).

**b)** Sinon, aller au pas 2.

**Pas 2** Prendre $x^{k+1} := (1-\lambda)x^k + \lambda y^k$.
Trouver $w^{k+1} := Pr_{F(x^{k+1})}(w^k)$.
Poser $k := k+1$ et retourner au pas 1.

**Théorème 11.** *Supposons que $\mathcal{C}$ est compact et $F$ est semi-continue supérieurement, $\gamma$-co-coercive, fermée dans $\mathcal{C}$ et $F(x)$ est compacte et convexe pour tout $x \in \mathcal{C}$ et $\alpha > \frac{1}{2\gamma}$. Si l'algorithme ne se termine pas, alors la suite $\left\{x^k\right\}$ est bornée et n'importe lequel de ses points d'accumulation est une solution de (VIP). En plus, $d(x^k, H(x^k)) \to 0$ quand $k \to \infty$.*

*Démonstration.* Dans l'algorithme, nous avons $w^{k+1} := Pr_{F(x^{k+1})}(w^k)$ avec $w^k \in F(x^k)$. Par le lemme (8) et la définition de la distance de Hausdorff, nous avons

$$\left\| w^{k+1} - w^k \right\| \leq \rho(F(x^k), F(x^{k+1}).$$

Puisque $F$ est $\gamma$-co-coercive dans $\mathcal{C}$, il suit que

$$\gamma \rho^2(F(x^k), F(x^{k+1})) \leq \left\langle x^k - x^{k+1}, w^k - w^{k+1} \right\rangle.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left\|x^k - x^{k+1} - \tfrac{1}{\alpha}(w^k - w^{k+1})\right\|^2 &= \left\|x^k - x^{k+1}\right\|^2 - \tfrac{2}{\alpha}\left\langle x^k - x^{k+1}, w^k - w^{k+1}\right\rangle \\ &\quad + \tfrac{1}{\alpha^2}\left\|w^k - w^{k+1}\right\|^2 \\ &\leq \left\|x^k - x^{k+1}\right\|^2 - \tfrac{2\gamma}{\alpha}\left\|w^k - w^{k+1}\right\| + \tfrac{1}{\alpha^2}\left\|w^k - w^{k+1}\right\|^2 \\ &= \left\|x^k - x^{k+1}\right\|^2 - (\tfrac{2\gamma}{\alpha} - \tfrac{1}{\alpha^2})\left\|w^k - w^{k+1}\right\|^2.\end{aligned}$$

Puisque $\alpha > \frac{1}{2\gamma}$, l'inégalité se réduit à

$$\left\|x^k - x^{k+1} - \tfrac{1}{\alpha}(w^k - w^{k+1})\right\|^2 \leq \left\|x^k - x^{k+1}\right\|^2.$$

Par $\left\|h(x^k, w^k) - h(x^{k+1}, w^{k+1})\right\|^2 \leq \left\|x^k - x^{k+1} - \frac{1}{\alpha}(w^k - w^{k+1})\right\|^2$ (vu dans le théorème (5)), il suit que

$$\left\|y^{k+1} - y^k\right\| \leq \left\|x^{k+1} - x^k\right\|$$

où $y^k = h(x^k, w^k) \in H(x^k), y^{k+1} = h(x^{k+1}, w^{k+1}) \in H(x^{k+1})$.

Par le théorème (10), tout point d'accumulation de la suite $\{x^k\}$ est un point fixe de $H$ qui est aussi une solution de (VIP).

De plus, puisque $\mathcal{C}$ est compact et $F$ est semi-continue inférieurement dans $\mathcal{C}$, il suit que la suite $\{w^k\}$ est bornée car $w^k \in F(x^k)$. Donc, sans perte de généralité, nous pouvons dire que la suite $\{w^k\}$ converge vers $w^*$. Puisque $F$ est fermée en $x^*$, nous avons que $w^* \in F(x^*)$ et $x^* \in \mathcal{C}$.

Pour prouver que $d(x^k, H(x^k)) \to 0$, nous observons que $y^k \in H(x^k)$ et donc

$$d(x^k, H(x^k)) \leq \left\|x^k - y^k\right\| \qquad \forall k.$$

Par le théorème (10), nous avons que $d(x^k, H(x^k)) \to 0$ quand $k \to \infty$.

$\square$

# Chapitre 6

# Le problème d'équilibre

## 6.1 Introduction

Revenons maintenant au problème d'équilibre que nous avons déjà défini comme :

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide, fermé et convexe dans un espace réel de Hilbert $\mathcal{H}$.
Soit $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathrm{I\!R}$ tel que $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$.

Considérons le **problème d'équilibre** suivant :

$$(\mathrm{PE}) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C} \text{ tel que} \\ f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C} \end{array} \right.$$

Dans cette section, nous développerons un algorithme convergeant linéairement pour (PE) avec $f$ une bifonction fortement monotone. Ensuite, nous incorperons cet algorithme dans la méthode du point proximal pour résoudre le problème d'équilibre monotone, plus forcément fortement monotone.

Cette partie s'organise de cette façon. Tout d'abord, nous présenterons un algorithme convergeant linéairement pour résoudre le problème d'équilibre fortement monotone. Cet algorithme sera utilisé, dans la section suivante, pour implémenter une méthode inexacte du point proximal pour résoudre le problème d'équilibre monotone. Dans la dernière section, nous appliquerons les méthodes vues aux inégalités variationnelles. Nous détaillerons, en fin de section, un nouvel algorithme convergeant linéairement, pour résoudre le problème fortement monotone.

## 6.2 Description de l'algorithme

D'abord, nous allons nous donner quelques définitions utiles.

**Définition 23.** La bifonction $f$ est monotone dans $\mathcal{C}$ si

$$f(x,y) + f(y,x) \leq 0 \qquad \forall x, y \in \mathcal{C}.$$

**Définition 24.** $f$ est fortement monotone dans $\mathcal{C}$ de module $\beta > 0$ ($\beta$-fortement monotone) si

$$f(x,y) + f(y,x) \leq -\beta \|x-y\|^2 \qquad \forall x, y \in \mathcal{C}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{C}$, nous définissons la fonction $S$ par

$$S(x) := \arg\min_{y \in \mathcal{C}} \left\{ r f(x,y) + \frac{1}{2}\|y-x\|^2 \right\}, \tag{6.1}$$

où $r > 0$ est le paramètre de régulation. Puisque la fonction objectif est fortement convexe, ce problème admet une solution unique. Donc, $S$ est bien définie et univoque.

Dans cette section, nous supposons que, pour tout $x \in \mathcal{C}$, la fonction $f(x,.)$ est propre, fermée, convexe dans $\mathcal{C}$ et que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$.

**Lemme 10.** *$x^*$ est une solution de (PE) si et seulement si $S(x^*) = x^*$.*

Ce lemme implique un algorithme itératif pour résoudre (PE) en générant la suite $\{x^j\}$ définie en prenant $x^{j+1} = S(x^j)$. Suivant les bonnes valeurs du paramètres $r$, la suite $\{x^j\}$ converge vers l'unique solution de (PE) quand $f$ est fortement monotone et satisfait la condition de Lipschitz :

Il existe $l_1 > 0,\ l_2 > 0$ tel que

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - l_1\|x-y\|^2 - l_2\|y-z\|^2 \qquad \forall x, y, z \in \mathcal{C}.$$

Si $x = z$, nous obtenons

$$f(x,y) + f(y,x) \geq -(l_1 + l_2)\|x-y\|^2 \qquad \forall x, y \in \mathcal{C}.$$

Donc, si $f$ est $\beta$-fortement monotone dans $\mathcal{C}$, alors $\beta \leq l_1 + l_2$.

En effet,

$$\begin{aligned} -(l_1 + l_2)\|x-y\|^2 &\leq f(x,y) + f(y,x) \\ &\leq -\beta\|x-y\|^2. \end{aligned}$$

Nous dirons que $l_1$ et $l_2$ sont les constantes de Lipschitz de $f$.

**Définition 25.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non convexe. Alors

$$x \text{ minimum de } f \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x).$$

**Définition 26.** $x^*$ sous-gradient de $f$ en $x$, i.e. $x^* \in \partial f(x)$, si

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x\rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

D'où, $0 \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle 0, y-x\rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$.

**Proposition 3.** *Supposons que $f$ est $\beta$-fortement monotone dans $\mathcal{C}$ et satisfait la condition de Lipschitz. Alors, pour tout point de départ $x^0 \in \mathcal{C}$, la suite $\{x^j\}$ définie par*

$$x^{j+1} = \arg\min_{x\in\mathcal{C}}\left\{rf(x^j,x) + \tfrac{1}{2}\|x-x^j\|^2\right\},$$

*satisfait*

$$\|x^{j+1} - x^*\|^2 \leq \delta\|x^j - x^*\|^2 \qquad \forall j$$

*avec $0 < r \leq \frac{1}{2l_2}$, où $x^*$ est l'unique solution de (PE) et $\delta := r(l_1 - \beta) + \frac{1}{2}$.*

*Démonstration.* Soit $\varphi_j(x) := r\underbrace{f(x^j,x)}_{\text{convexe}} + \frac{1}{2}\underbrace{\|x-x^j\|^2}_{\text{fortement convexe}}$.

Alors $\varphi_j$ est fortement convexe dans $\mathcal{C}$ de module 1.

Donc, il existe $w \in \partial\varphi_j(x^{j+1})$ satisfaisant

$$\varphi_j(x^{j+1}) + \langle w, x - x^{j+1}\rangle + \tfrac{1}{2}\|x - x^{j+1}\|^2 \leq \varphi_j(x) \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Puisque $x^{j+1}$ est la solution du problème (6.1),

$$\langle w, x - x^{j+1}\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

D'où, nous avons

$$\varphi_j(x^{j+1}) + \tfrac{1}{2}\left\|x - x^{j+1}\right\|^2 \le \varphi_j(x) \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Prenons $x = x^*$ et utilisons la définition de $\varphi_j$ :

$$rf(x^j, x^{j+1}) + \tfrac{1}{2}\left\|x^{j+1} - x^j\right\|^2 \le rf(x^j, x^*) + \tfrac{1}{2}\left\|x^j - x^*\right\|^2 - \tfrac{1}{2}\left\|x^{j+1} - x^*\right\|^2.$$

Or

$$\tfrac{1}{2}\left\|x^{j+1} - x^*\right\|^2 \le r\left[f(x^j, x^*) - f(x^j, x^{j+1})\right] + \tfrac{1}{2}\left\|x^j - x^*\right\|^2 - \tfrac{1}{2}\left\|x^{j+1} - x^j\right\|^2.$$

Puisque $f$ est $\beta$-fortement monotone dans $\mathcal{C}$,

$$f(x^j, x^*) \le -f(x^*, x^j) - \beta\left\|x^j - x^*\right\|^2.$$

En substituant dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left\|x^{j+1} - x^*\right\|^2 &\le r\left[-f(x^j, x^{j+1}) - f(x^*, x^j) - \beta\left\|x^j - x^*\right\|^2\right] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left\|x^j - x^*\right\|^2 - \tfrac{1}{2}\left\|x^{j+1} - x^j\right\|^2.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Maintenant appliquons la condition de Lipschitz avec $x = x^*$, $y = x^j$ et $z = x^{j+1}$ :

$$\begin{aligned}-f(x^j, x^{j+1}) - f(x^*, x^{j+1}) &\le -f(x^*, x^{j+1}) + l_1\left\|x^* - x^j\right\|^2 + l_2\left\|x^j - x^{j+1}\right\|^2 \\ &\le l_1\left\|x^* - x^j\right\|^2 + l_2\left\|x^j - x^{j+1}\right\|^2.\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que $f(x^*, x^{j+1}) \ge 0$, puisque $x^*$ est la solution de (PE).

En substituant dans (6.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left\|x^{j+1} - x^*\right\|^2 &\le r\left[l_1\left\|x^j - x^*\right\|^2 + l_2\left\|x^j - x^{j+1}\right\|^2 - \beta\left\|x^j - x^*\right\|^2\right] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left\|x^j - x^*\right\|^2 - \tfrac{1}{2}\left\|x^{j+1} - x^j\right\|^2 \\ &= \left[r(l_1 - \beta) + \tfrac{1}{2}\right]\left\|x^j - x^*\right\|^2 + \left(rl_2 - \tfrac{1}{2}\right)\left\|x^{j+1} - x^j\right\|^2.\end{aligned}$$

Par hypothèse, $r \le \frac{1}{2l_2}$, il suit que

$$\left\|x^{j+1}-x^*\right\|^2 \leq \left[r(l_1-\beta)+\tfrac{1}{2}\right]\left\|x^j-x^*\right\|^2.$$

□

**Corollaire 6.** *Si* $0 < r \leq \frac{1}{2l_2}$ *et* $-\frac{1}{2} < r(l_1-\beta) < \frac{1}{2}$,
*alors* $\left\|x^{j+1}-x^*\right\|^2 \leq \delta\left\|x^j-x^*\right\|^2 \ \forall j$
*avec* $0 < \delta := r(l_1-\beta)+\frac{1}{2} < 1$.

*Remarque* 13. Il est évident que sous l'hypothèse $0 < r \leq \frac{1}{2l_2}$, la fonction $\delta(r) := r(l_1-\beta)+\frac{1}{2}$ atteint son minimum en $r^* = \frac{1}{2l_2}$ quand $l_1 < \beta$ ; en $r^* = 0$ quand $l_1 > \beta$ et $\delta(r) \equiv \frac{1}{2}$ quand $l_1 = \beta$.

En se basant sur les propositions précédentes, nous pouvons développer un algorithme convergeant linéairement pour résoudre le problème (PE) quand $f$ est $\beta$-fortement monotone dans $\mathcal{C}$ et satisfaisant la condition de Lipschitz.

ALGORITHME 1

**Pas 0** Choisir une tolérance $\epsilon \geq 0$ et $r$ tel que

$$0 < r \leq \frac{1}{2l_2},\ -\frac{1}{2} < r(l_1-\beta) < \frac{1}{2}.$$

Prendre $x^0 \in \mathcal{C}$.

**Itération** $j$ $(j = 0, 1, \cdots)$
Calculer $x^{j+1}$ en résolvant le problème fortement convexe

$$(P_j) \quad x^{j+1} = \arg\min_{y\in\mathcal{C}}\left\{rf(x^j,y)+\tfrac{1}{2}\left\|y-x^j\right\|^2\right\}.$$

**a)** Si $\frac{\delta_0^{j+1}}{1-\delta_0} \leq \epsilon$ avec $\delta_0 := \sqrt{r(l_1-\beta)+\frac{1}{2}}$, alors l'algorithme se termine : $x^{j+1}$ est une $\epsilon$-solution de (PE).

**b)** Sinon, si $\frac{\delta_0^{j+1}}{1-\delta_0} > \epsilon$, alors $j := j+1$ et retourner à l'itération $j$.

Notons que, par la propriété de la contraction $\left\|x^{j+1}-x^*\right\| \leq \delta_0\left\|x^j-x^*\right\|$ avec $\delta_0 < 1$, il suit que

$$\left\|x^{j+1} - x^*\right\| \leq \frac{\delta_0^{j+1}}{1-\delta_0}\left\|x^0 - x^1\right\| \ \forall j.$$

Donc, si $\frac{\delta_0^{j+1}}{1-\delta_0}\left\|x^0 - x^1\right\| \leq \epsilon$, alors $\left\|x^{j+1} - x^*\right\| \leq \epsilon$.

Dans ce cas, nous terminons l'algorithme pour obtenir une $\epsilon$-solution $x^{j+1}$ dans le sens $\left\|x^{j+1} - x^*\right\| \leq \epsilon$.

Clairement, l'algorithme se termine après un nombre fini d'itérations quand $\epsilon > 0$. En fait, le critère d'arrêt

$$\frac{\delta_0^{j+1}}{1-\delta_0}\left\|x^0 - x^1\right\| \leq \epsilon,$$

a lieu si

$$x^1 = x^0 \text{ ou si } j \geq \frac{\log \frac{\epsilon(1-\delta_0)}{\|x^1 - x^0\|}}{\log \delta_0} - 1.$$

Quand $\epsilon = 0$, la suite $\{x^j\}$ générée par l'algorithme peut être infinie, mais elle converge linéairement vers $x^*$.

*Remarque* 14. Pour garantir la convergence, on se propose de choisir une valeur de $r$ tel que $\delta(r) := r(l_1 - \beta) + \frac{1}{2}$ est le plus petit sous les hypothèses du corollaire vues précédemment. Par la remarque qui le suit, nous pouvons prendre $r = \frac{1}{2}l_2$ si $l_1 \leq \beta$ et $r = r_0$ si $l_1 > \beta$ où $r_0$ est un nombre suffisamment petit dans l'interval $(0, \frac{1}{2}l_2]$.

## 6.3 Application à la méthode du point proximal

Dans la section précédente, pour garantir la convergence, nous exigions que $f$ soit fortement monotone dans $\mathcal{C}$. Cette exigence n'est généralement pas satisfaite dans les applications.

Etant donné $x^k \in \mathcal{C}$, la méthode du point proximal pour (PE) requiert de résoudre le **sous-problème d'équilibre**

$$(PE(x^k))\begin{cases} \text{trouver } x^{k+1} \in \mathcal{C} \text{ tel que} \\ c_k f(x^{k+1}, y) + \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $c_k > 0$.

Puisque le calcul de la solution exacte de ce sous-problème peut être relativement difficile voire impossible, il est essentiel de calculer les solutions approximées. Pour ce faire, nous allons diviser notre problème $(PE(x^k))$ en deux problèmes approchés :

$$A(x^k)\begin{cases} \text{trouver } x^{k+1} \in \mathcal{C} \text{ tel que} \\ c_k f(x^{k+1}, y) + \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \geq -\epsilon_k \qquad \forall y \in \mathcal{C} \end{cases}$$

et

$$B(x^k)\begin{cases} \text{trouver } x^{k+1} \in \mathcal{C} \text{ tel que} \\ c_k f(x^{k+1}, y) + \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \geq -\epsilon_k \left\| x^{k+1} - x^k \right\| \qquad \forall y \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où

$$\epsilon_k \geq 0, \ \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty.$$

Nous pouvons prouver que si $f$ est semi-continue supérieurement, monotone dans $\mathcal{C}$ et $f(x,.)$ est propre, fermée, convexe pour tout $x \in \mathcal{C}$, alors la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme du point proximal, utilisant le sous-problème $A(x^k)$, converge faiblement vers une solution de (PE) avec $0 < c < c_k < +\infty$ pour tout $k$ et $\epsilon_k \geq 0$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty$. Nous avons les mêmes résultats pour le sous-problème $B(x^k)$.

**Lemme 11.** *Supposons que $f$ est monotone dans $\mathcal{C}$ et satisfait la condition de Lipschitz avec les constantes $l_1$ et $l_2$. Alors, pour tout $c_k > 0$, nous avons* *(i) la bifonction*

$$\phi_k(x,y) := c_k f(x,y) + \langle x - x^k, y - x \rangle$$

*est fortement monotone de module* 1.

*(ii) $\phi_k$ satisfait la condition de Lipschitz, c'est-à-dire*

$$\phi_k(x,y) + \phi_k(y,x) \geq \quad \phi_k(x,z) - \left(c_k l_1 + \tfrac{1}{4t}\right) \|x-y\|^2$$

$$- (c_k l_2 + t) \|y - z\|^2 \quad \forall x, y, z \in C, \ \forall t > 0.$$

*Démonstration.* (*i*) Puisque $f$ est monotone dans $C$, nous avons

$$\begin{aligned}\phi_k(x,y) + \phi_k(y,x) \quad &= c_k f(x,y) + \langle x - x^k, y - x \rangle + c_k f(y,x) + \langle y - x^k, x - y \rangle \\ &\leq \langle x - y, y - x \rangle \leq - \|x-y\|^2\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\phi_k$ est fortement monotone de module 1 dans $C$.

(*ii*) Soit

$$g_k(x,y) := \langle x - x^k, y - x \rangle .$$

D'abord, nous allons montrer que $g_k$ satisfait la condition de Lipschitz. C'est-à-dire,

$$g_k(x,y) + g_k(y,z) \geq g_k(x,z) - \tfrac{1}{4t} \|x-y\|^2 - t \|y-z\|^2 \quad \forall x, y, z \in C, \ \forall t > 0.$$

En effet, soit $x, y, z \in C$ arbitraire. Alors

$$\begin{aligned}g_k(x,z) - g_k(y,z) - g_k(x,y) \quad &= \langle x - x^k, z - x \rangle - \langle y - x^k, z - y \rangle - \langle x - x^k, y - x \rangle \\ &= \langle x - x^k, z - y \rangle - \langle y - x^k, z - y \rangle \\ &= \langle x - y, z - y \rangle \leq \|x-y\| \|z-y\|.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $2ab \leq \frac{1}{2t}a^2 + 2tb^2$ (car $2ab \leq a^2 + b^2$), nous obtenons

$$2\|x-y\| \|z-y\| \leq \tfrac{1}{2t} \|x-y\|^2 + 2t \|z-y\|^2 \quad \forall t > 0$$

d'où, il suit que

$$g_k(x,y) + g_k(y,z) \geq g_k(x,z) - \tfrac{1}{4t}\|x-y\|^2 - t\|z-y\|^2 \quad \forall t > 0.$$

Maintenant, observons que, puisque $\phi_k(x,y) := c_k f(x,y) + g_k(x,y)$ et que $f$ satisfait la condition de Lipschitz avec les constantes $l_1$ et $l_2$, il suit que $\phi_k$ satisfait aussi la condition de Lipschitz avec les constantes $L_{k1} = c_k l_1 + \frac{1}{4t}$ et $L_{k2} = c_k l_2 + t$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\phi_k(x,y) + \phi_k(y,x) &= c_k f(x,y) + c_k f(y,z) + g_k(x,y) + g_k(y,z) \\
&\geq c_k f(x,z) - c_k l_1 \|x-y\|^2 - c_k l_2 \|y-z\|^2 \\
&\quad + g_k(x,z) - \tfrac{1}{4t}\|x-y\|^2 - t\|z-y\|^2 \\
&= \phi_k(x,z) - (c_k l_1 + \tfrac{1}{4t})\|x-y\|^2 \\
&\quad - (c_k l_2 + t)\|y-z\|^2 \quad \forall x,y,z \in \mathcal{C},\ \forall t > 0.
\end{aligned}$$

□

Ce lemme nous permet d'appliquer l'algorithme 1 pour résoudre les sous-problèmes d'équilibres $PE(x^k)$. En couplant cet algorithme et l'algorithme du point proximal, définissant $A(x^k)$ et $B(x^k)$, nous implémentons des algorithmes résolvant (PE).

Soit $L_{k1} := c_k l_1 + \frac{1}{4t}$ et $L_{k2} := c_k l_2 + t$ $(t > 0)$ les constantes de Lipschitz de $\phi_k$.

ALGORITHME 2

**Initialisation** Fixer $t > 0$. Choisir $c > 0$ et deux suites $\{\epsilon_k\}$, $\{c_k\}$ de nombres positifs tel que

$$c < c_k < +\infty \text{ et } \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty.$$

Prendre $x^0 \in \mathcal{C}$.

**Itération** $k$ $(k = 0, 2, \dots)$ (boucle extérieure).
Choisir $r_k$ tel que

$$0 < r_k \leq \tfrac{1}{2c_k l_2 + 2t} \text{ et } -\tfrac{1}{2} < r_k(L_{k1} - 1) < \tfrac{1}{2}.$$

Soit $\delta_{k0} := \sqrt{r_k(L_{k1} - 1) + \frac{1}{2}}$.

Poser $x^{k,0} := x^k$.

**Itération** $j$ $(j = 0, \cdots, J_k)$ (boucle intérieure).

***Pas 1 :*** Calculer $x^{k,j+1}$ en résolvant le problème fortement convexe

$$x^{k,j+1} = \arg\min_{y\in C} \left\{ r_k\phi_k(x^{k,j}, y) + \frac{1}{2}\left\|y - x^{k,j}\right\|^2 \right\}. \tag{6.3}$$

***Pas 2 :***

**a)** Si $\frac{\delta_{k0}^{j+1}}{1-\delta_{k0}}\left\|x^{k,0} - x^{k,1}\right\| \leq \epsilon_k$, alors la boucle intérieure se termine. Poser $x^{k+1} := x^{k,j+1}$ et retourner à l'itération $k$ avec $k := k + 1$.

**b)** Sinon, si $\frac{\delta_{k0}^{j+1}}{1-\delta_{k0}}\left\|x^{k,0} - x^{k,1}\right\| > \epsilon_k$, alors retourner au pas 1 de l'itération $j$ avec $j := j + 1$.

Puisque $\phi_k$ est fortement monotone et satisfait la condition de Lipschitz, par l'algorithme 1, la boucle intérieure de l'algorithme 2 doit se terminer, après un nombre fini d'itérations, avec une $\epsilon_k$-solution du sous-problème $(PE(x^k))$. Donc, par la convergence de l'algorithme du point proximal, la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers une solution de (PE).

*Remarque* 15. $(i)$ Le principal sous-problème de chaque itération $k$ dans l'algorithme 2 est le problème (6.3). Par la définition de $\phi_k$, ce sous-problème est de la forme

$$\min_{y\in C}\left\{r_k c_k f(x^{k,j}, y) + \langle x^{k,j} - x^k, y - x^{k,j}\rangle + \tfrac{1}{2}\left\|y - x^{k,j}\right\|^2\right\}.$$

$(ii)$ Selon le critère d'approximation donné par $B(x^k)$, le pas 2 peut être remplacé par celui-ci :

***Pas 2 :***

**a)** Si $\frac{\delta_{k0}^{j+1}}{1-\delta_{k0}}\left\|x^{k,0} - x^{k,1}\right\| \leq \epsilon_k\left\|x^{k,j+1} - x^{k,j}\right\|$, alors la boucle intérieure se termine. Poser $x^{k+1} := x^{k,j+1}$ et retourner à l'itération $k$ avec $k := k + 1$.

**b)** Sinon, si $\frac{\delta_{k0}^{j+1}}{1-\delta_{k0}} \left\| x^{k,0} - x^{k,1} \right\| > \epsilon_k \left\| x^{k,j+1} - x^{k,j} \right\|$, alors retourner au pas 1 de l'itération $j$ avec $j := j + 1$.

## 6.4 Application aux inégalités variationnelles

Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ un ensemble fermé et convexe, comme précédemment.

Soit $\varphi$ une fonction propre, fermée et convexe dans $\mathcal{C}$.

Soit $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ une fonction multivoque.

Supposons $\mathcal{C} \subseteq domF := \{x \in \mathcal{H} : F(x) \neq \emptyset\}$.

Considérons l'**inégalité variationnelle multivoque** suivante :

$$\text{(VIP)} \begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C},\ w^* \in F(x^*) \text{ tel que} \\ \langle w^*, y - x^* \rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Nous savons que si $\mathcal{C}$ est un cône fermé et convexe et si $\varphi$ est constante, alors (VIP) devient le **problème complémentaire** :

$$\text{(CP)} \begin{cases} \text{trouver } x^* \in \mathcal{C},\ w^* \in F(x^*) \text{ tel que} \\ w^* \in \mathcal{C}^*,\ \langle w^*, x^* \rangle = 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{C}^* := \{w | \langle w, x \rangle \geq 0\ \forall x \in \mathcal{C}\}$ est le cône polaire de $\mathcal{C}$.

Rappelons quelques définitions utiles :

**Définition 27.** La fonction multivoque $F$ est monotone dans $\mathcal{C}$ si

$$\forall x, y \in \mathcal{C},\ \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y),\ \langle u - v, x - y \rangle \geq 0.$$

**Définition 28.** $F$ est fortement monotone de module $\beta$ dans $\mathcal{C}$ ($\beta$-fortement monotone) si

$$\exists \beta > 0 :\ \forall x, y \in \mathcal{C},\ \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y),\ \langle u - v, x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2 .$$

**Définition 29.** $F$ est Lipschitzienne de constante $L$ dans $\mathcal{C}$ ($L$-Lipschitzienne) si

$$\exists L > 0 :\ \forall x, y \in \mathcal{C},\ \sup_{u \in F(x)} \inf_{v \in F(y)} \|u - v\| \leq L \|x - y\| .$$

Définissons la bifonction $f$ par

$$f(x, y) := \sup_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle + \varphi(y) - \varphi(x). \tag{6.4}$$

**Lemme 12.** *Supposons que $F(x)$ est non vide, bornée, fermée et convexe pour tout $x \in C$. Soit $f$ donnée par (6.4). Alors :*

*(i) Si $F$ est $\beta$-fortement monotone dans $C$, alors $f$ est $\beta$-fortement monotone dans $C$.*

*(ii) Si $F$ est L-Lipschitzienne dans $C$, avec $L > 0$, alors $f$ satisfait les conditions de Lipschitz, c'est-à-dire*

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - l_1 \|x-y\|^2 - l_2 \|y-z\|^2$$

*où $l_1$ et $l_2$ sont des nombres positifs vérifiant $4l_1 l_2 \geq L^2$.*

*Démonstration.* Par la définition de $f$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x,y) + f(y,z) - f(x,z) &= \max\nolimits_{u \in F(x)} \langle u, y-x \rangle + \max\nolimits_{v \in F(y)} \langle v, z-y \rangle \\ &\quad - \max\nolimits_{\xi \in F(x)} \langle \xi, z-x \rangle \\ &\geq \langle u, y-x \rangle + \langle v, z-y \rangle - \max\nolimits_{\xi \in F(x)} \langle \xi, z-x \rangle \end{aligned}$$

$\forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y)$.

Soit $\xi_x \in F(x)$ tel que $\max_{\xi \in F(x)} \langle \xi, z-x \rangle = \langle \xi_x, z-x \rangle$.

Prendre $u = \xi_x$ et $v_y \in F(y)$ tel que $\|\xi_x - v_y\| \leq L \|x-y\|$.

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} f(x,y) + f(y,z) - f(x,z) &\geq \langle \xi_x, y-x \rangle - \langle \xi_x, z-x \rangle + \langle v_y, z-y \rangle \\ &\geq \langle \xi_x, y-z \rangle + \langle v_y, z-y \rangle \\ &= -\langle \xi_x - v_y, z-y \rangle \\ &\geq -L \|y-x\| \|z-y\| \\ &\geq -2\sqrt{l_1 l_2} \|y-x\| \|z-y\| \end{aligned}$$

$$= \quad -2\sqrt{l_1}\,\|y-x\|\,\sqrt{l_2}\,\|z-y\|$$

$$\geq \quad -l_1\,\|y-x\|^2 - l_2\,\|z-y\|^2.$$

□

En prenant $l_1 := \frac{L}{2t}$ et $l_2 := \frac{tL}{2}$, nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 7.** *Pour tout $t > 0$,*

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - \tfrac{L}{2t}\,\|x-y\|^2 - \tfrac{tL}{2}\,\|y-z\|^2 .$$

Il est facile à voir que si $F(x)$ est fermée, bornée et convexe et si $f$ est définie par (6.4), alors l'inégalité variationnelle (VIP) est équivalente au problème d'équilibre (PE), dans le sens où leurs solutions coïncident.

*Remarque* 16. Pour garantir que l'algorithme 1 est linéairement convergent pour des inégalités variationnelles fortement monotones, le paramètre de régulation $r$ doit satisfaire les hypothèses du corollaire (6). Quand $l_1 = \frac{L}{2t}$, $l_2 = \frac{tL}{2}$, ces hypothèses deviennent

$$0 < r \leq \frac{1}{Lt} \text{ et } -\frac{1}{2} < r(\frac{L}{2t} - \beta) < \frac{1}{2}, \tag{6.5}$$

où $t$ est un nombre positif.
Si nous choisissons $t = \frac{L}{2\beta}$, alors (6.5) devient vrai pour tout $r$ vérifiant $0 < r \leq \frac{2\beta}{L^2}$. D'où, nous obtenons ces résultats dans [1, 2] commme cas spécial.

Similairement, pour l'algorithme 2 appliqué à (VIP) avec $F$ monotone dans $C$, puisque $L_{k1} = c_k l_1 + \frac{1}{4t} = \frac{c_k L}{2t} + \frac{1}{4t}$, $L_{k2} = c_k l_2 + t = \frac{c_k L t}{2} + t$ et $\beta = 1$, les hypothèses (6.5) deviennent

$$0 < r_k \leq \tfrac{1}{c_k Lt + 2t} \text{ et } -\tfrac{1}{2} < r_k(\tfrac{2c_k L + 1 - 4t}{4t} - \beta) < \tfrac{1}{2},$$

où $t$ est un nombre positif.

Maintenant, appliquons l'algorithme 1 au problème complémentaire (CP) quand $C = \mathbb{R}^n_+$ et $F$ est un fonction univoque et $\beta$-fortement monotone dans $C$. Alors (CP) devient

$$(\text{CP'}) \begin{cases} \text{trouver } x^* \geq 0 \text{ tel que} \\ F(x^*) \geq 0, \ \langle F(x^*), x^* \rangle = 0. \end{cases}$$

Notons que dans ce cas, le sous-problème

$$(P_j) \quad x^{j+1} = \arg\min_{y \in C} \left\{ r f(x^j, y) + \tfrac{1}{2} \left\| y - x^j \right\|^2 \right\}$$

dans l'algorithme 1 devient

$$x^{j+1} = \arg\min_{y \in \mathbb{R}^n_+} \left\{ r \left\langle F(x^j), y - x^j \right\rangle + \tfrac{1}{2} \left\| y - x^j \right\|^2 \right\}$$

ce qui correspond à

$$x^{j+1} = Pr_{\mathbb{R}^n_+} \left( x^j - rF(x^j) \right)$$

la projection euclidienne du point $x^j - rF(x^j)$ dans $\mathbb{R}^n_+$. En fait, il est facile de vérifier que si $y = (y_1, \cdots, y_n)^T$ est la projection euclidienne du vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ dans $\mathbb{R}^n_+$, alors pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous avons

$$y_i = \begin{cases} x_i \text{ si } 0 \leq x_i \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

ALGORITHME 3

**Pas 0** Choisir une tolérance $\epsilon \geq 0$ et $t > 0$. Choisir $r$ tel que

$$0 < r \leq \tfrac{1}{Lt} \text{ et } -\tfrac{1}{2} < r(\tfrac{L}{2t} - \beta) < \tfrac{1}{2}.$$

Prendre $x^0 \geq 0$.

**Itération** $j$ $(j = 0, 1, \cdots)$.

Calculer $x^{j+1} = (x_1^{j+1}, \cdots, x_n^{j+1})^T$ en prenant

$$x_i^{j+1} = \begin{cases} x_i^j \text{ si } rF_i(x^j) \leq x_i^j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

**a)** Si $\frac{\delta_0^{j+1}}{1-\delta_0}\left\|x^1 - x^0\right\| \leq \epsilon$, avec $\delta_0 := \sqrt{r(\frac{L}{2t} - \beta) + \frac{1}{2}}$, alors l'algorithme se termine : $x^{j+1}$ est une $\epsilon$-solution de (CP').

**b)** Si $\frac{\delta_0^{j+1}}{1-\delta_0}\left\|x^1 - x^0\right\| > \epsilon$, alors $j := j + 1$ et retourner à l'itération $j$.

# Rappel de la méthode du point fixe

Commençons par une série de définitions relatives à la méthode du point fixe.

**Définition 30.** Un point fixe est une application $f : E \to E$ tel que $f(x) = x$ où $E$ est un ensemble.

**Définition 31.** Une distance sur $E$ est une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ tel que
$(i)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$(ii)$ $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in E$
$(iii)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in E$.

Nous dirons qu'un espace muni d'une distance est un espace métrique.

**Définition 32.** Soit $E$ un espace métrique, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $E$. $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy si

$$d(x_n, x_m) \to 0 \text{ quand } n, m \to +\infty.$$

Nous dirons qu'un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy a une limite dans cet espace.

**Définition 33.** Soit $(E,d)$ un espace métrique.
$f : E \to E$ est contractante s'il existe $\lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$ tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) \quad \forall x, y \in E.$$

Maintenant, énonçons le théorème du point fixe utilisé dans ce travail.

**Théorème 12.** *(Théorème du Point Fixe ou Principe de Contraction de Banach)*
*Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et non vide.*
*Soit $f : E \to E$ une contraction.*
*Alors,*

1) $f$ *admet un point fixe* $x^*$ *unique tel que* $f(x^*) = x^*$.

2) *quelque soit* $x_0 \in E$
$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_{n+1} = f(x_n) \to x^*$ *quand* $n \to +\infty$.

3)

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x^*) &\leq \tfrac{\lambda}{1-\lambda}\, d(x_m, x_{m-1}) \\
&\leq \tfrac{\lambda^m}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0) \qquad \forall m \geq 1.
\end{aligned}
$$

4)

$$d(x_{m+1}, x^*) \leq \lambda\, d(x_m, x^*).$$

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la recherche d'algorithmes convergeant linéairement pour résoudre les inégalités variationnelles (univoques et multivoques) et le problème d'équilibre. Pour ce faire, nous avons d'abord considéré que le problème était fortement monotone, et nous l'avons résolu par le principe de contraction de Banach. Ensuite, nous avons couplé notre méthode avec la méthode du point proximal pour résoudre le problème monotone (plus forcément fortement monotone).

Tout d'abord, nous avons montré que le problème d'équilibre comprend bien comme cas particuliers les inégalités variationnelles. Ensuite, nous nous sommes intéressés aux inégalités variationnelles univoques (mixtes). Nous les avons résolu grâce à la combinaison de la méthode du point proximal et le principe du point fixe. En effet, le principe du point fixe requiert comme hypothèses que le problème soit fortement monotone alors que ces hypothèses ne sont pas nécessaires pour la méthode du point proximal.

Ensuite, nous avons étudié les inégalités vaiationnelles multivoques (mixtes). Nous les avons aussi résolu en couplant la méthode du point proximal et le principe de contraction de Banach. Et enfin, nous sommes revenu au cas du problème d'équilibre, que nous avons résolu de la même manière.

# Bibliographie


1. E. Blum et W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, The Mathematics Student, Vol.63 No.**1-4**, pp. 123-145 (1994).

2. L.D. Muu, V.H. Nguyen et J.-J. Strodiot, *A linearly convergent algorithm for strongly monotone equilibrium problem : Application to inexact prox-point methods*, Département de Mathématique, FUNDP, Namur, Belgique.

3. P.N. Anh, L.D. Muu, V.H. Nguyen et J.-J. Strodiot, *Using the Banach contraction principle to implement the proximal point method for multivalued monotone variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.124 No.**2**, pp. 285-306 (2005).

4. P.N. Anh et L.D. Muu, *Contraction mapping fixed point methods for solving multivalued mixed variational inequalities*, Research report, Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam.

5. P.N. Anh, L.D. Muu, V.H. Nguyen et J.-J. Strodiot, *On contraction and nonexpansiveness properties of the marginal mapping in generalized variational inequalities involving co-coercive operators*, Generalized Convexity and Generalized Monotonicity and Applications, A.Eberhard, N.Hadjisavvas et D.Luc, Springer, pp.89-111 (2005).

6. P.N. Anh et L.D. Muu, *Coupling the Banach contraction mapping principle and the proximal point algorithm for solving monotone variational inequalities*, Acta Mathematica Vietnamica, Vol.29 No.**2**, pp. 119-133 (2004).

7. J.-J. Strodiot, *Proximal point method for maximal monotone operators*, Ecole d'Eté de Nha Trang, Vietnam (août 2004).

8. V.H. Nguyen, *Mathématiques Appliquées : Points fixes*, Département de Mathématique, FUNDP, Namur, Belgique, cours de 2e candidature en mathématique (2002-2003).

9. J.-J. Strodiot, *Introduction to Optimization*, Département de Mathématique, FUNDP, Namur, Belgique, cours de 1e licence (2004-2005).

10. R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton (1970).